TRIGONOMETRIA
'IANA E SFERICA

DEL

SIG. LEGENDRE

COLLE NOTE ALLA GEOMETRIA

ED ALTRE GIUNTE.

VOLUME II.

FIRENZE
PRESSO GUGLIELMO PIATTI
MDCCCX.

AVVERTIMENTO

Le cifre Arabe poste in margine indicano le Proposizioni della Geometria nel I. Volume: così, per esempio, i numeri 20. 3. rimandano alla Proposizione XX. del III. Libro; ed i numeri Romani denotano i paragrafi della Trigonometria, ai quali si dee ricorrere nel caso di schiarimento.

INDICE

DEL PRESENTE VOLUME

TRATTATO
DI
TRIGONOMETRIA

La Trigonometria ha per oggetto di *risolvere* i Triangoli, vale a dire, di determinare gli angoli, e i loro lati per mezzo d' un numero di dati sufficiente.

Nei Triangoli rettilinei serve conoscer tre delle sei parti, che gli compongono, purchè fra queste parti vi sia un lato. Perchè, se non fossero dati che i tre angoli, è chiaro che tutti i Triangoli simili sodisfarebbero alla questione.

Nei Triangoli sferici tre dati qualunque, angoli, o lati, bastano sempre per determinare il Triangolo, poichè in questa sorte di Triangoli non si considera la grandezza assoluta dei lati; ma solamente il lor rapporto col quadrante, o il numero de' *gradi*, ch' essi contengono.

Rispetto ai Problemi annessi al Libro II. si è di già veduto come i Triangoli rettilinei si costruiscono per mezzo di tre loro parti date; le Proposizioni XXIV. e XXV. del Libro V. danno egualmente un' idea delle costruzioni, in virtù delle quali si potrebber risolvere i casi analoghi dei Triangoli sferici. Ma queste costruzioni, che sono esatte in Teoria, non darebbero che una mediocre approssima-

zion nella Pratica (1) a causa dell'imperfezione degli istrumenti, dei quali esse esigon l'impiego. I metodi Trigonometrici, per il contrario, indipendenti da qualunque operazione meccanica somministrano le soluzioni per qualunqne grado d'esattezza, che si possa desiderare: essi sono fondati sopra le proprietà delle linee chiamate *seni, coseni, tangenti* ec., per mezzo delle quali siamo arrivati ad esprimere in una maniera semplicissima le relazioni, ch'esistono tra i lati, e gli angoli dei Triangoli.

Noi esporremo adesso le proprietà di queste linee, e le formule principali, che ne resultano; formule, che son d'un grand' uso in tutte le parti delle Matematiche, e danno ancora dei mezzi di perfezionamento all'Analisi Algebrica. Noi le applicheremo dopo di questo alla risoluzione dei Triangoli rettilinei, ed a quella dei Triangoli sferici.

Divisione della Circonferenza.

1. Fino a questi ultimi tempi i Geometri eransi accordati a dividere la circonferenza in 360 parti eguali, chiamate *gradi*, il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, ec. Questo modo di divisione presentava qualche

---

(1) Infatti bisogna distinguere le figure, che ad altro non servono che a dirigere il ragionamento per la dimostrazion d'un *Teorema*, o la soluzion d'un *Problema*, dalla Figura, che si costruisce per conoscere qualcheduna delle di lei dimensioni. Le prime son supposte sempre esatte; le seconde, s'elle non son descritte esattamente difatto, daranno dei resultati fallaci.

facilità nella pratica a causa del gran numero di divisori di 60, e 360, ma egli era realmente soggetto all' inconveniente dei numeri complessi, e noceva sovente alla prontezza del calcolo.

I Dotti, a cui si dee l' invenzione del nuovo Sistema di pesi, e misure, hanno conosciuto che v' era un gran vantaggio a introdurre la division decimale nella misura degli angoli. In conseguenza essi han riguardato come unità principale il quarto della circonferenza, o il quadrante, misura dell' angolo retto, ed hanno divisa quest' unità in 100 parti eguali chiamate *gradi*, il grado in 100 *minuti*, ed il minuto in 100 *secondi*.

Noi non impiegheremo d'ora in avanti che la nuova divisione, ovvero la division decimale della circonferenza. Questa è quella, che più conviene alla natura della nostra Aritmetica, ed è la più propria per abbreviare i calcoli.

11. I gradi, minuti, e secondi si contrassegnano respettivamente con i caratteri °, ′, ″,: così l'espressione 16° 6′ 75″ rappresenta un arco, o un angolo di 16 gradi, 6 minuti, 75 secondi. Se si rapporta questo medesimo arco al quadrante preso per unità, desso s'esprimerà per 0, 160675. Si vede nel medesimo tempo che l' angolo misurato da quest' arco è all'angolo retto :: 160675 : 1000000; rapporto, che non dedurebbesi così facilmente dalle espressioni conformi all' antica divisione della circonferenza.

Gli archi, e gli angoli sono espressi indistintamente nel calcolo per dei numeri di gradi, minuti, e secondi. Così indicheremo l'angolo retto, o il quadrante con 100°, due angoli retti, o la mezza-circonferenza con 200°, quattro angoli retti, o la circonferenza intera con 400; e così in seguito.

III. Il *complemento* d'un angolo, o d'un arco è ciò, che resta togliendo quest'angolo, o quest'arco da 100°. Così un angolo di 25° 40′ ha per complemento 74° 60′; un angolo di 12° 4′ 62″ ha per complemento 87° 95′ 38″.

In generale, A essendo un angolo, o un arco qualunque, 100° — A è il complemento di quest'angolo, o di quest'arco. Da ciò si vede che, se l'angolo, o l'arco, di cui si tratta, è più grande di 100°, il suo complemento sarà negativo. Perciò il complemento di 160.° 84′ 10″ è — 60° 84′ 10″. In questo caso il complemento preso complemento sarebbe la quantità, che bisognerebbe togliere dall'angolo, o dall'arco dato acciocchè il resto fosse eguale a 100°.

I due angoli d'un Triangolo rettangolo valgono insieme un angolo retto: essi son dunque complemento l'uno dell'altro.

IV. Il *supplemento* d'un angolo, o d'un arco è ciò, che rimane togliendo quest'angolo, o quest'arco da 200°, valore di due angoli retti, o d'una mezza-circonferenza. Così, A essendo un angolo, o un arco qualunque, 200° — A è il suo supplemento.

In qualunque Triangolo un angolo è il sup-

plemento della somma degli altri due, poichè i tre insieme fanno 200.°

Gli angoli dei Triangoli tanto rettilinei, che sferici, ed i lati di questi ultimi hanno sempre i lor supplementi positivi, perchè essi sono minori di 200°.

Nozioni generali sopra i senì, coseni, tangenti ec.

v. Il seno dell'arco AM, o dell'angolo ACM è la perpendicolare MP abbassata da un'estremità dell'arco sopra il diametro, che passa per l'altra estremità. Fig. 1.

Se all'estremità del raggio CA si conduce la perpendicolare AT fino all'incontro di CM prolungata, la linea AT, così terminata, si chiama la *tangente*, e CT la *secante* dell'arco AM, o dell'angolo ACM.

Queste tre linee MP, AT, CT, dipendenti dall'arco AM, e sempre determinate dall'arco AM, e dal raggio, s'indicano così: MP $=$ *sen* AM, o *sen* ACM, AT $=$ *tang* AM, o *tang* ACM, CT $=$ *sec* AM, o *sec* ACM.

vi. Avendo preso l'arco AD eguale a un quadrante, se dai punti M, e D si conducono le rette MQ, DS perpendicolari al raggio CD, una terminata a questo raggio, l'altra terminata al raggio CM prolungato, le linee MQ, DS, e CS saranno parimente il seno, tangente, e secante dell' arco MD, complemento di AM. Si chiamano, per abbreviare, il *coseno*, la *cotangente*, e la *co-*

secante dell'arco AM, e s'indicano così: $MQ = cos\ AM$, o $cos\ ACM$, $DS = cot\ AM$, o $cot\ ACM$, $CS = cosec\ AM$, o $cosec\ ACM$. In generale, A essendo un arco, o un angolo qualunque, si ha $cos\ A = sen\ (100^{\circ} - A)$, $cot\ A = tang\ (100^{\circ} - A)$, $cosec\ A = sec\ (100 - A)$.

Fig. 1. Il Triangolo MQC è, per costruzione, eguale al Triangolo CPM; così averemo $CP = MQ$: dunque nel Triangolo rettangolo CMP, di cui l'ipotenusa è eguale al raggio, i due lati MP, CP sono il seno, e coseno dell'arco AM. Quanto ai Triangoli CAT, CDS, essi son simili ai Triangoli eguali CPM, CQM, e così sono ancora simili tra di loro. Da ciò dedurremo subito i differenti rapporti, che esistono tra le linee, che abbiam definite; ma bisogna prima vedere qual sia l'andamento progressivo di queste medesime linee allorchè l'arco, al qual si riportano, aumenta da zero fino a 200°.

VII. Supponghiamo che un'estremità dell'arco resti fissa in A, e che l'altra estremità, segnata M, percorra tutta l'estensione della semi-circonferenza da A fino a B nella direzione ADB.

Allorchè il punto M è riunito ad A, ovvero allorchè l'arco AM è zero, i tre punti T, M, P si confondono col punto A; dal che si fa manifesto che il seno, e la tangente d'un arco zero son zero, e che il coseno di quest'arco medesimo è uguale al raggio, come ancora la sua secante. Dunque, indicando per R il raggio del circolo, si avrà

sen $o = o$, *tang* $o = o$, *cos* $o = R$, *sec* $o = R$.

VIII. A misura che il punto M si avanza verso D, il seno aumenta, come pur la tangente, e secante; ma il coseno, la cotangente, e la cosecante diminuiscono.

Tostochè il punto M si trova nel mezzo di AD, ovvero allorchè l'arco AM è di 50°, come il suo complemento MD, il seno MP è uguale al coseno MQ, o CP, e il Triangolo CMP, divenuto isoscele, dà la proporzione $MP : CM :: 1 : \sqrt{2}$, ovvero $sen\ 50° : R :: 1 : \sqrt{2}$.

Dunque $sen\ 50° = cos\ 50° = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$.

In questo medesimo caso il Triangolo CAT diviene isoscele, ed eguale al triangolo CDS; dal che si vede che la tangente di 50°, e la sua cotangente son tutte due eguali al raggio, e che così abbiamo $tang\ 50° = cot\ 50° = R$.

IX. L'arco A M continuando ad accrescersi, il seno aumenta fino a tanto che il punto M sia arrivato a D: allora il seno è eguale al raggio, ed il coseno è zero. Dunque si ha $sen\ 100° = R$, e $cos\ 100° = o$; e si può osservare che questi valori sono una conseguenza di quelli, che noi abbiamo trovati pei seni, e coseni dell'arco zero, perchè il complemento di 100° essendo zero, si ha $sen\ 100° = cos\ o° = R$, e $cos\ 100° = sen\ o° = o$.

Rispetto poi alla tangente, dessa aumenta in una maniera prontissima a misura che il punto M si accosta a D; ed infine, allorchè egli è arrivato a D, non esiste più propriamente tangente, perchè le linee AT, CD essendo paralelle, non possono mai incontrar-

si. Perciò si dice che la tangente di $100°$ è infinita, è si scrive *tang* $100° = \infty$.

Il complemento di $100°$ essendo zero, si ha *tang* $0 =$ *cot* $100°$, e *cot* $0 =$ *tang* $100°$. Dunque *cot* $0 = \infty$, e *cot* $100° = 0$.

x Il punto M continuando ad avanzarsi da D verso B, il seno diminuisce, ed il coseno aumenta. Così si vede che l'arco A M' ha per seno M' P'. e per coseno M' Q, o CP'. Ma l' arco M'B è supplemento di AM' poichè AM' + M'B è eguale ad una semi-circonferenza; d' altronde, se si conduca M'M paralella ad AB, è chiaro che gli archi AM, BM', compresi tra due paralelle, saranno eguali, come pure le perpendicolari, o seni MP, M' P'. Dunque *il seno d'un arco, o d'un angolo è eguale al seno del supplemento di quest' arco, o di quest' angolo.*

L'arco, o l'angolo A ha per supplemento $200° - A$: così proviene generalmente *sen* A $=$ *sen* $(200° - A)$. La medesima proprietà esprimerebbesi ancora con l' equazione *sen* $(100° + B) =$ *sen* $(100° - B)$, B essendo l'arco DM, o il suo eguale DM'.

xi. I medesimi archi AM', AM, che son supplementi l'uno dell'altro, e che hanno dei seni eguali, hanno ancora i coseni eguali C P', CP; ma bisogna osservare che questi coseni son diretti in sensi diversi. Questa differenza di situazione si esprime nel calcolo con l' opposizione dei segni; di maniera che, se riguardinsi come positivi, o affetti dal segno + i coseni degli archi minori di $100°$, bisogne-

rà riguardar come negativi, o affetti dal segno —, i coseni degli archi maggiori di 100°. Si avrà dunque in generale

$$\cos A = -\cos (200^\circ - A),$$

ovvero $\cos (100^\circ + B) = -\cos (100^\circ - B)$; vale a dire che *il coseno d'un arco o d'un angolo maggiore di* 100° *è eguale al coseno del suo supplemento, preso negativamente*.

Il complemento d'un arco maggiore di 100° essendo negativo *, non fa maraviglia che il coseno di questo complemento sia negativo; ma, per rendere questa verità ancor più palpabile, cerchiam l'espressione della distanza del punto A dalla perpendicolare MP. Se si si fa l'arco $AM = x$, si avrà $CP = \cos x$, e la distanza cercata $AP = R - \cos x$. La medesima formula dev'esprimere la distanza del punto A dalla retta MP, qualunque sia la grandezza dell'arco AM, la cui origine è al punto A. Supponghiamo dunque che il punto M arrivi a M', in maniera che x indichi l'arco AM'; si avrà anco in questo punto $AP' = R - \cos x$; dunque $\cos x = R - AP' = AC - AP' = - CP'$; ciò che fa vedere che $\cos x$ è allor negativo; e perchè $CP' = CP = \cos (200^\circ - x)$, si ha $\cos x = -\cos (200 - x)$, come di già l'abbiamo trovato.

* III.

Da ciò si vede che un angolo ottuso ha il medesimo seno, e il medesimo coseno dell'angolo acuto, che gli serve di supplemento, con questa sola differenza che il coseno dell' angolo ottuso debb' essere affetto dal se-

gno —. Così si ha *sen* $150° = sen\ 50° = \frac{1}{2} R\sqrt{2}$, e *cos* $150° = - cos\ 50° = - \frac{1}{2} R \sqrt{2}$.

Quanto all'arco ADB, eguale alla semi-circonferenza, il suo seno è zero, ed il suo coseno è eguale al raggio preso negativamente; si ha dunque *sen* $200° = 0$, e cos $200 = - R$. Questo pure è ciò, che darebbero le formule *sen* $A = sen\ (200° - A)$, e *cos* $A = - cos\ (200° - A)$, facendovi $A = 200°$.

Fig. 1. XII. Esaminiamo adesso quel, che diventa la tangente d'un arco AM′ maggiore di 100.°: seguendo la definizione, essa dev' essere determinata dal concorso delle linee rette AT, CM′. Queste linee non si riscontrano nel senso di A T, ma nel senso opposto A V; laonde egli è manifesto che la tangente d'un arco maggiore di 100° è negativa. D'altronde, se si osserva che AV è la tangente dell' arco AN supplemento di AM′ (poichè NAM′ è una semi-circonferenza) se ne concluderà che *la tangente d'un arco, o d'un angolo maggiore di* 100° *e eguale a quella del suo supplemento preso negativamente*; *di modo che si ha*

$$tang\ A = - tang\ (200 - A).$$

L'istesso è della cotangente rappresentata da DS′, la quale è eguale, ed in senso contrario a D S cotangente di A M. Abbiamo dunque ancora

$$cot\ A = - cot\ (200° - A).$$

Le tangenti e le cotangenti son dunque negative, come pure i coseni, da 100° fino a 200°. Ed in quest' ultimo limite abbiamo *tang*

$200^\circ = 0$, e $\cot 200^\circ = -\cot 0 = -\infty$

XIII. Nella Trigonometria non ha luogo la considerazione dei seni, coseni, ec. degli archi, o degli angoli maggiori di 200°; perchè gli angoli dei triangoli tanto rettilinei che sferici, ed i lati di questi ultimi son sempre compresi tra zero, e 200°. Ma nelle diverse applicazioni della Geometria non è raro considerare degli archi più grandi della semi-circonferenza, come pure degli archi, che comprendano più circonferenze. È dunque necessario trovar l'espressione dei seni, e coseni di questi archi, qualunque sia la loro grandezza.

Osserviamo intanto che due archi eguali, e di segni contrarj AM, AN hanno dei seni eguali, e di segni contrarj MP, PN, mentre che il coseno C P è il medesimo, e del medesimo segno per l'uno, e per l'altro. Si ha dunque in generale.

$$\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x$$
$$\cos\,(-x) = \cos x;$$

formule, che serviranno ad esprimere i seni, e coseni degli archi negativi.

Da 0° fino a 200° i seni son sempre positivi, perchè son situati da una medesima parte del diametro AB; dai 200° fino a' 400° i seni son negativi, perchè son situati dall'altra parte di questo diametro. Sia $ABN' = x$ un arco maggiore di 200°, il suo seno $P'N'$ è eguale a PM seno dell' arco $AM = x - 200^\circ$; dunque si ha in generale

$$\text{sen}\,x = -\,\text{sen}\,(x - 200^\circ).$$

Questa formula darebbe i seni tra 200°, e 400° per mezzo dei seni tra 0°, e 200°; essa dà in particolare $\text{sen}\,400^\circ = -\,\text{sen}\,200^\circ = 0$. Egli è evidente difatti che, se un arco è eguale alla circonferenza intera, le due estremità si confondono in un medesimo punto, ed il seno riducesi a zero.

Non è meno evidente che, se a un arco qualunque A M si aggiunga una o più circonferenze, si ricaderà esattamente sopra il punto M, e l'arco così aumentato avrà il medesimo *seno* che l'arco AM; onde, se C indica una circonferenza intera o $400°$, si avrà $sen\ x = sen\ (C + x) = sen\ (2\ C + x) = son\ (3\ C + x) =$ ec. La medesima cosa avrà luogo per i coseni, tangenti ec:

Adesso, qualunque sia l'arco proposto x, è facile di vedere che il suo *seno* potrà sempre esprimersi con un segno convenevole mediante il seno d'un arco minore di $100°$, perchè si potrà subito toglier dall' arco x tante volte $400°$, quante volte vi possono essere contenuti: sia il resto y, si avrà $sen\ x = sen\ y$. In seguito, se y è maggiore di $200°$, si farà $y = 200° + z$, e s'avrà $sen\ y = -\ sen\ z$. Tutti i casi son dunque ridotti a quello, in cui l'arco proposto è minore di $200°$; e siccome d'altronde abbiamo $sen\ (100° + x) = sen\ (100 - x)$, egli è chiaro che si riducono finalmente al caso, in cui l'arco proposto è tra zero, e $100°$.

XIV. I coseni riduconsi sempre ai seni in virtù della formula $cos\ A = sen\ (100° - A)$: così, sapendo valutare i seni in tutti i casi possibili, si sapranno ancora valutare i coseni. Del resto apertamente si vede nella Figura che i coseni negativi son separati dai coseni positivi mediante il diametro D E; in modo che tutti gli archi, la cui estremità cade alla sinistra di DE, hanno un coseno positivo, laddove quelli, la cui estremità cade alla dritta, hanno un coseno negativo.

Quindi è che da $0°$ a $100°$ i coseni son positivi, da $100°$ a $300°$ essi son negativi, da $300°$ a $400°$ dessi ritornano positivi; e dopo una rivoluzione intera riprendono i medesimi valori come nella rivoluzion precedente, perchè abbiamo ancora $cos\ (400 + x) = cos\ x$.

Dopo queste spiegazioni egli è facile concepire che i *seni*, e *coseni* degli archi multipli del quadrante hanno i seguenti valori.

sen $0°=0$	sen $100°=R$	cos $0°=R$	cos $100°=0$
sen $200°=0$	sen $300°=-R$	cos $200°=-R$	cos $300°=0$
sen $400°=0$	sen $500°=R$	cos $400°=R$	cos $500°=0$
sen $600°=0$	sen $700°=-R$	cos $600°=-R$	cos $700°=0$
sen $800°=0$	sen $900°=R$	cos $800°=R$	cos $900°=0$
ec.	ec.	ec.	ec.

In generale, k indicando un numero intero qualunque, si avrà $sen\ 2k.\ 100° = 0$, $sen\ (4k+1).\ 100° = R$, $sen\ (4k-1).\ 100° = -R$, $cos\ (2k+1).\ 100° = 0$, $cos\ 4k.\ 100° = R$, $cos\ (4k+2).\ 100° = -R$.

Ciò, che abbiam detto sin quì dei seni, e coseni, ci dispensa da entrare in alcun altro particolare sulle tangenti, cotangenti ec. degli archi maggiori di 200°, perchè i valori di queste quantità son facili a dedursi da quelli dei seni, e coseni dei medesimi archi, come vedremo mediante le formule, che adesso andiamo ad esporre.

Teoremi, e Formule concernenti i seni, coseni, tangenti ec.

XV. *Il seno d'un arco è la metà della corda, che sottende un arco doppio.*

Perchè il raggio CA perpendicolare a MN divide in due parti eguali la corda MN, e l'arco sotteso MAN; dunque MP, *seno* dell'arco MA, è la metà della corda MN, che sottende l'arco MAN doppio di MA. Fig. 1.

La corda, che sottende la sesta parte del-

la circonferenza, è eguale al raggio; dunque $sen \frac{400^\circ}{12}$, ovvero $sen\ 33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ R; e vale a dire che il *seno* del terzo dell'angolo retto è eguale alla metà del raggio.

XVI. *Il quadrato del seno d'un arco, più il quadrato del suo coseno, è eguale al quadrato del raggio; di modo che avremo in generale* $sen^2 A + cos^2 A = R^2$. (1).

Questa proprietà resulta immediatamente dal Triangolo rettangolo C M P, ove si ha $\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$.

Da ciò ne nasce che, essendo dato il seno d'un arco, si troverà il suo coseno, e reciprocamente, per mezzo delle formule $cos\ A = \pm\sqrt{(R^2 - sen^2 A)}$, $sen\ A = \pm\sqrt{(R^2 - cos^2 A)}$. Il doppio segno di queste formule proviene da questo, che il medesimo seno M P corrisponde a due archi A M, AM', i cui coseni CP, CP' sono eguali, e di segni contrarj, ed il coseno medesimo CP corrisponde a due archi AM, AN, i cui seni MP, PN son parimente uguali, e di segni contrarj.

Così, per esempio, avendo trovato $sen\ 33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ R, si dedurrà $cos\ 33^\circ \frac{1}{3}$, o $sen\ 66^\circ \frac{2}{3} = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4} R^2)} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$.

XVII. *Essendo dati il seno e coseno dell'arco A, si può trovar la tangente, secante, cotangente, e cosecante del medesimo arco per mezzo delle formule seguenti*

(1) S'indica qui per sen^2 A il quadrato di sen A, e similmente per cos^2 A il quadrato di cos A.

$tang\ A = \frac{R\ sen\ A}{cos\ A}$, $sec\ A = \frac{R^2}{cos\ A}$, $cot\ A = \frac{R\ cos\ A}{sen\ A}$, $cosec\ A = \frac{R^2}{sen\ A}$.

Infatti i triangoli simili CPM, CAT, CDS danno le proporzioni

CP : PM :: CA : AT, ovvero $cos\ A : sen\ A :: R : tan\ A = \frac{R\ sen\ A}{cos\ A}$;

CP : CM :: CA : CT, ovvero $cos\ A : R :: R : sec\ A = \frac{R^2}{cos\ A}$;

PM : CP :: CD : DS, ovvero $sen\ A : cos\ A :: R : cot\ A = \frac{R\ cos\ A}{sen\ A}$;

PM : CM :: CD : CS, ovvero $sen\ A : R :: R : cosec\ A = \frac{R^2}{sen\ A}$,

dalle quali si traggono le quattro formule, di cui si parla. Del resto si può notare che le due ultime formule si dedurrebbero dalle due prime ponendo semplicemente $100^\circ - A$ in luogo di A.

Queste formule daranno i valori, ed i segni proprj delle tangenti, secanti, ec. per qualunque arco, di cui si conosceranno il seno e il coseno; e siccome la legge progressiva dei seni, e cosensi, secondo i differenti archi, ai quali rapportansi, è stata sufficientemente spiegata nel Capitolo precedente, non resta nulla a desiderare sopra la legge, che seguono similmente le tangenti, secanti, ec.

Trigonom Legendre

prima edizione

Si possono altresì confermare per loro mezzo più resultanti, che sonosi di già ottenuti relativamente alle tangenti; per esempio, se si fa $A=100°$, si avrà *sen* $A=R$, e *cos* $A=0$; dunque dunque *tang* $100°=\frac{R^2}{0}$; espressione, che indica una quantità infinita, perchè R^2 diviso per una quantità piccolissima darebbe un quoziente grandissimo; dunque R^2 diviso per zero darà un quoziente più grande di qualunque quantità finita. E perchè zero può esser preso col segno $+$, o col segno $-$, s'avrà il valore ambiguo *tang* $100° = \pm\infty$.

Sia ancora $A=200°-B$; s'avrà *sen* $A=$ *sen* B, e *cos* $A=-$ *cos* B; dunque *tang* $(200°-B)=\frac{R\,sen\,B}{-cos\,B}=-\frac{R\,sen\,B}{cos\,B}=-$ *tang* B; ciò che si accorda con l'articolo XII.

XVIII. **Le formule dell'articolo precedente, combinate tra loro, e con l'equazione *sen*^{2} $A+$ *cos*^{2} $A=R^2$ ne forniscono alcun altre, che meritano attenzione.**

Abbiamo tosto $R^2+tang^2\,A=R^2+\frac{R^2 sen^2 A}{cos^2 A}=R^2\frac{(sen^2 A+cos^2 A)}{cos^2 A}=\frac{R^4}{cos^2 A}$ dunque $R^2+tang^2\,A=sec^2\,A$; formula, che si dedurebbe immediatamente dal triangolo rettangolo CAT. Avrebbesi ancora dalle formule stesse, o dal triangolo rettangolo CDS, $R^2+cot^2\,A=cosec^2\,A$.

Finalmente, se si moltiplicano tra di loro le formule *tang* $A=\frac{R\,sen\,A}{cos\,A}$, *cot* $A=\frac{R\,cos\,A}{sen\,A}$, si avrà *tang* $A\times$ *cot* $A=R^2$; formula che dà

$cot\ A = \frac{R^2}{tang A}$, et $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$. Si avrebbe nel medesimo modo $cot\ B = \frac{R^2}{tang\ B}$. Dunque $cot\ A : cot\ B :: tang\ B : tang\ A$, e vale a dire *che le cotangenti di due archi sono in ragione inversa delle loro tangenti.*

Questa formula $cot\ A \times tang\ A = R^2$ si ricaverebbe immediatamente dal paragone dei triangoli simili CAT, CDS, i quali danno AT : CA :: CD : DS, ovvero $tang\ A : R :: R : cot\ A$.

XIX. *Essendo dati i seni, e coseni di due archi* a, *e* b, *si possono determinare i seni, e coseni della somma, o della differenza di questi archi, per mezzo delle formule seguenti.*

$$sen\,(a+b) = \frac{sen\,a\cos b + sen\,b\cos a}{R};$$

$$sen\,(a-b) = \frac{sen\,a\cos b - sen\,b\cos a}{R};$$

$$cos\,(a+b) = \frac{cos\,a\cos b - sen\,a\,sen\,b}{R};$$

$$cos\,(a-b) = \frac{cos\,a\cos b + sen\,a\,sen\,b}{R}.$$

Sia il raggio AC = R, l'arco AB = a, l'arco BD = b, e per conseguenza ABD = $a + b$. Dai punti B, e D abbassate BE, DF perpendicolari sopra AC; dal punto D conducete DI perpendicolare sopra BC; finalmente per il punto I conducete IK perpendicolare, ed IL paralella ad AC. Fig. 2.

I triangoli simili BCE, ICK danno le proporzioni

CB : CI :: BE : IK, ovvero R : $\cos b$ :: $\operatorname{sen} a$: IK $= \frac{\operatorname{sen} a \cos b}{R}$,

CB : CI :: CE : CK, ovvero R : $\cos b$ :: $\cos a$: CK $= \frac{\cos a \cos b}{R}$.

I triangoli DIL, CBE, che hanno i lati respettivamente perpendicolari, son simili, e danno le proporzioni

CB:DI :: CE:DL, ovvero R : $\operatorname{sen} b$ :: $\cos a$: DL $= \frac{\cos a \operatorname{sen} b}{R}$,

CB : DI :: BE : IL, ovvero R : $\operatorname{sen} b$ :: $\operatorname{sen} a$: IL $= \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R}$.

Ma si ha IK + DL = DF = $\operatorname{sen}(a+b)$, e CK — IL = CF = $\cos(a+b)$; dunque

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R}.$$

Sarebbe facile dedurre da queste due formule i valori di $\operatorname{sen}(a-b)$, e di $\cos(a-b)$; ma si può trovarli direttamente per mezzo della Figura medesima. Infatti, se si prolunga il seno DI sino a tanto ch' egli incontri la circonferenza in M, si avrà BM = BD = b, e MI = ID = $\operatorname{sen} b$. Per il punto M conducete MP perpendicolare, e MN paralella ad AC; poi-

chè MI=DI, si avrà $MN = IL$, ed $IN = DL$. Ma si ha $IK - IN = MP = sen\,(a-b)$, e $CK + MN = CP = cos\,(a-b)$; dunque

$$sen\,(a-b) = \frac{sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a}{R},$$

$$cos\,(a-b) = \frac{cos\,a\,cos\,b + sen\,a\,sen\,b}{R}.$$

Queste son le formule, che trattavasi di dimostrare.

Si potrebbe aver dubbio che la dimostrazion precedente non fosse bastantemente generale, perchè la Figura, che abbiamo seguita, suppone gli archi a e b, come ancora $a+b$ più piccoli di 100°. Ma si può subito col comodo d'una seconda Figura estendere facilmente la dimostrazion delle formule del seno, e coseno dell'arco $a+b$ al caso ove $a+b$ fosse compreso tra 100° e 200°. Ciò posto, ecco in qual modo uno potrà assicurarsi che le formule sono vere per tutte le grandezze possibili degli archi a e b.

Supponghiamo che siasi provata l'esattezza delle due formule

$$R.\,sen\,(a+b) = sen\,a\,cos\,b + sen\,b\,cos\,a$$
$$R.\,cos\,(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sen\,a\,sen\,b$$

per tutti i valori di a, e b minori dei limiti A. e B; io dico ch'elleno avranno egualmente luogo allorchè b essendo ancora $< B$, si avrà $a < 100° + A$. Infatti abbiamo per le proprietà dimostrate

$$sen\,(100 + m + b) = sen\,(100° - m - b) = cos\,(m+b),$$
$$cos\,(100 + m + b) = -cos\,(100° - m - b) = -sen\,(m+b);$$

ma supponendo $m < A$, e $b < B$, si conoscono i valori di $sen\,(m+b)$, e di $cos\,(m+b)$; per questi valori dunque si avrà

$$R.\,sen\,(100° + m + b) = cos\,m\,cos\,b - sen\,m\,sen\,b,$$
$$R.\,cos\,(100° + m + b) = -sen\,m\,cos\,b - sen\,b\,cos\,m.$$

Sia $100^\circ + m = a$, ovvero $m = a - 100^\circ$, s'avrà $\cos m = \mathrm{sen}\,(100 - m) = \mathrm{sen}\,(200 - a) = \mathrm{sen}\,a$, $\mathrm{sen}\,m = \cos(100^\circ - m) = \cos(200^\circ - a) = -\cos a$; dunque

$$R\,\mathrm{sen}\,(a+b) = \mathrm{sen}\,a \cos b + \mathrm{sen}\,b \cos a,$$
$$R \cos(a+b) = \cos a \cos b - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b.$$

Da ciò si vede che queste formule, le quali non erano dimostrate fuorchè nei limiti $a < A$, $b < B$, lo sono adesso in dei limiti più estesi $a < 100^\circ + A$, $b < B$. Ma per la ragione medesima il limite di $< b$ può essere avanzato di 100°, ed in seguito quello di a, il che può continuarsi indefinitamente; dunque le formule, di cui si parla, hanno luogo qualunque sia la grandezza degli archi a, e b. Si dimostrerebbe la stessa cosa riguardo alle formule, che somministrano $\mathrm{sen}\,(a-b)$, e $\cos(a-b)$: di più queste ultime facilmente dedurrannosi dalle prime; imperocchè, seguendo ciò che precede, si ha

$$R\,\mathrm{sen}\,(\overline{a-b}+b) = \mathrm{sen}\,(a-b) \cos b + \cos(a-b)\,\mathrm{sen}\,b,$$
$$R \cos(\overline{a-b}+b) = \cos(a-b) \cos b - \mathrm{sen}\,(a-b)\,\mathrm{sen}\,b.$$

Mettende $R\,\mathrm{sen}\,a$, e $R \cos a$ in luogo dei primi membri, si ricaveran facilmente queste due Equazioni

$$R\,\mathrm{sen}\,(a-b) = \mathrm{sen}\,a \cos b - \mathrm{sen}\,b \cos a,$$
$$R \cos(a-b) = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\,b \cos a;$$

formule, che avranno luogo per qualunque valore di a, e di b.

XX. Se nelle formule dell' articolo antecedente si fa $b = a$, la prima, e la terza daranno

$$\mathrm{sen}\,2a = \frac{2\,\mathrm{sen}\,a \cos a}{R},\quad \cos 2a = \frac{\cos^2 a - \mathrm{sen}^2 a}{R}.$$

Queste quì serviranno a trovare i *seni*, e *coseni* d'un arco doppio quando conoscesi il *seno*, e *coseno* dell' arco scempio. Ed è questo il Problema concernente la duplicazione d'un arco.

Reciprocamente, per dividere un arco dato

a in due parti eguali, ponghiamo nelle medesime formule $\frac{1}{2}a$ in luogo di a, avremo.

$$sen\,a=\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}a\,cos\,\frac{1}{2}a}{R},\ cos\,a=\frac{cos^2\frac{1}{2}a-sen^2\frac{1}{2}a}{R}.$$

Ora, poichè abbiamo ad un tempo $cos^2\frac{1}{2}a+sen^2\frac{1}{2}a=R^2$, e $cos^2\frac{1}{2}a-sen^2\frac{1}{2}a=R\,cos\,a$, resulta

$$cos^2\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}R^2+\tfrac{1}{2}R\,cos\,a,\ e\ sen^2\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}R^2-\tfrac{1}{2}R\,cos\,a;$$

dunque

$$sen\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\tfrac{1}{2}R^2-\tfrac{1}{2}R\,cos\,a)},$$
$$cos\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\tfrac{1}{2}R^2+\tfrac{1}{2}R\,cos\,a)}.$$

Così, facendo $a=100^\circ$, ovvero $cos\,a=0$, si ha $sen\,50^\circ=cos\,50^\circ=\sqrt{\frac{1}{2}R^2}=R\sqrt{\frac{1}{2}}$; in seguito, se si fa $a=50^\circ$, che dà $cos\,a=R\sqrt{\frac{1}{2}}$, si avrà $sen\,25^\circ=R\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$, e $cos\,25^\circ=R\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$.

XXI. Si possono ancora ottenere i valori di $sen\,\frac{1}{2}a$, e $cos\,\frac{1}{2}a$ espressi per mezzo del $sen\,a$; e ciò sarà utile in molte occasioni. Questi valori sono

$$sen\,\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2+R\,sen\,a)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2-R\,sen\,a)}$$
$$cos\,\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2+R\,sen\,a)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2-R\,sen\,a)}.$$

Difatto, se s'inalza la prima Equazione al quadrato, s'avrà $sen^2\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}(R^2+R\,sen\,a)+\frac{1}{4}(R^2-R\,sen\,a)-\frac{1}{2}\sqrt{(R^4-R^2\,sen^2 a)}=\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{2}R\,cos\,a$; avrebbesi parimente $cos^2\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R\,cos\,a$, che si accorda co' precedenti valori di $sen\,\frac{1}{2}a$, e $cos\,\frac{1}{2}a$. Bisogna frattanto osservare che, se $cos\,a$ fosse negativo, il radicale $\sqrt{(R^2-R\,cos\,a)}$ dovrebbe esser preso con un segno contrario nei valori di $sen\,\frac{1}{2}a$, e $cos\,\frac{1}{2}a$, il che cangerebbe l'uno nell' altro.

XXII. Per mezzo di queste formule è agevole determinare i *seni*, e *coseni* di tutte le parti decime del quadrante.

E primieramente sia $sen\, 20° = x$, $2x$ sarà la corda di 40°, o il lato del Decagono regolare iscritto: ora, questo lato è eguale al più gran segmento del raggio diviso in *media ed estrema ragione* *; dunque, se facciasi il raggio $=1$, si avrà $1 : 2x :: 2x : 1-2x$. Da ciò abbiamo $4x^2 = 1-2x$, o $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$; dunque $(x+\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$; dunque $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$, e finalmente x, o $sen\, 20° = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$.

Geom. * 5, 4

Questo valore, elevato al quadrato, dà $sen^2 20° = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$; dunque $1 - sen^2 20°$, o $cos^2 20° = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$. Ma $cos^2 a - sen^2 a = cos\, 2a$; dunque $cos\, 40°$, o $sen\, 60° = \frac{4+4\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Adesso, se nelle formule del n.° XXI si faccia $R=1$, $a=20°$, e $sen\, a = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$, se ne dedurrà

$$sen\, 10° = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})},$$
$$cos\, 10° = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

E se in seguito facciasi nelle medesime formule $a = 60°$, e $sen\, a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, si avrà

$$sen\, 30° = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})},$$
$$cos\, 30° = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Con questi valori uniti quelli, che di già conosciamo, di $sen\, 50°$, e di $sen\, 100°$, si può formare la Tavola susseguente

$sen\ \ 0° = cos\, 100° = 0.$
$sen\, 10° = cos\, 90° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$sen\, 20° = cos\, 80° = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$
$sen\, 30° = cos\, 70° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
$sen\, 40° = cos\, 60° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$sen\, 50° = cos\, 50° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$sen\, 60° = cos\, 40° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
$sen\, 70° = cos\, 30° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
$sen\, 80° = cos\, 20° = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$
$sen\, 90° = cos\, 10° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$
$sen\, 100° = cos\ \ 0° = 1.$

Questi valori possono ancora semplificarsi; poi-

chè si ha $\sqrt{(3+\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, e $\sqrt{(3-\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; d'onde si vede, che riguardando come cognite le radici $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, e $\sqrt{10}$, non restano che quattro estrazioni di radici quadrate da fare per ottenerne i valori dei *seni*, e *coseni* di tutti gli archi multipli di 10.°

XXIII. Ricaveremo da tali formule due conseguenze notabili. 1.° Poichè $2\,sen\,40°$ è la corda di 80°, o il lato del Pentagono regolare iscritto, questo lato sarà $=\frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, ed il suo quadrato $=\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$. Il lato del Decagono regolare $=2\,sen\,20°=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, il suo quadrato $=\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. Ora, $\frac{1}{4}(10-2\sqrt{5})=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. Dunque *la somma fatta del quadrato del raggio, e del quadrato del lato del Decagono è eguale al quadrato del lato del Pentàgono regolare iscritto*.

2.° Tra i *seni* delle divisioni decimali dispari del quadrante si ha la relazione seguente $sen\,90°+sen\,30°+sen\,10°=sen\,50°+sen\,70°$, mentre le divisioni pari dan similmente $sen\,60°=sen\,20°+\frac{1}{2}$. Ma queste formule non son che dei casi particolari, e si può dimostrare che, x essendo un arco d'un numero qualunque di gradi, si ha sempre

$sen(100°-x)+sen(20°+x)+sen(20°-x)=sen(60°-x)+sen(60°+x)$.

Infatti la formula $sen\,(a+b)+sen(a-b)=2\,sen\,a\cos b$ somministra

$$sen\,(20°+x)+sen\,(20°-x)=2\,sen\,20°\cos x,$$
$$sen\,(60°+x)+sen\,(60°-x)=2\,sen\,60°\cos x.$$

Dunque, poichè si ha $sen\,60°-sen\,20°=\frac{1}{2}$, e $\cos x=sen\,(100°-x)$, queste due Equazioni tolte l'una dall'altra daranno

$sen(60°+x)+sen(60°-x)-sen(20°-x)-sen(20°-x)=sen\,(100°-x)$; formula, da cui deriva l'Equaziòn concernente le divisioni dispari facendo $x=10°$, e che in general può servire alla verificazione delle Tavole dei *seni*.

. XXIV. Se nelle formule prima, e terza dell' articolo XIX. si faccia $b = 2a$, avremo

$$sen\,3a = \frac{sen\,2a\cos a + \cos 2a\,sen\,a}{R},$$

$$\cos 3a = \frac{\cos 2a\cos a - sen\,2a\,sen\,a}{R}.$$

Sostituendo nelle medesime in luogo di $sen\,2a$, e $\cos 2a$ i valori trovati nell'articolo XX., e semplicizzandone il resultato per mezzo dell' Equazione $sen^2 a + \cos^2 a = R^2$, si avrà

$$sen\,3a = 3\,sen\,a - \frac{4\,sen^3 a}{R^2},$$

$$\cos 3a = \frac{4\cos^3 a}{R^2} - 3\cos a.$$

Queste formule, che servono alla triplicazione degli archi, possono servire altresì ad operare la lor trisezione, o divisione in tre parti eguali. Perchè, se si fa $sen\,3a = c$, e $sen\,a = x$, si avrà per determinar x l'Equazione $cR^2 = 3R^2x - 4x^3$. Dal che rendesi chiaro che il Problema della trisezione dell' angolo, considerato analiticamente, è del terzo grado.

Se nelle medesime formule dell' art. XIX. si fa successivamente $b = 3a$, $b = 4a$, ec., s'avranno i seni, e coseni degli archi $4a$, $5a$, ec., e vale a dire, in generale i seni, e coseni dei multipli di a. Vicendevolmente le formule, che servono alla moltiplicazione degli archi, daranno l' Equazioni da risolversi per dividere un arco dato in parti eguali, cioè per de-

terminare *sen a*, o *cos a* allorchè si conoscano *sen n a*, e *cos n a*.

XXV. Sviluppiamo ancora i valori di *sen* 5*a*, e *cos* 5 *a*, e per questo prendiamo le formule

$$sen(3a+2a)=\frac{sen\,3a\cos 2a+\cos 3a\,sen\,2a}{R},$$

$$\cos(3a+2a)=\frac{\cos 3a\cos 2a-sen\,3a\,sen\,2a}{R}.$$

Se si sostituiscano i valori di già trovati negli art. 20, e 24, si avrà dopo le riduzioni

$$sen\,5a=5\,sen\,a-\frac{20\,sen^3\,a}{R^2}+\frac{16\,sen^5\,a}{R^4},$$

$$\cos 5a=5\cos a-\frac{20\cos^3 a}{R^2}+\frac{16\cos^5 a}{R^4}.$$

Il che manifesta che il Problema della sezione d'un angolo in cinque parti eguali sarebbe del quinto grado; e così sarebbe dei gradi relativi all'altre divisioni rispetto ai numeri primi 7, 11, 15, ec.

XXVI. Sia proposto, per esempio, di trovare il valore del *sen* 1° prossimo al vero fino a quindici decimali; questo può esser utile assai per la costruzion delle Tavole dei *seni*. L'espressione del *sen* 10°, trovata nel n.° 22., essendo ridotta in decimali, nella supposizione di R=1, dà *sen* 10° = 0, 15643 44650 40251; e da ciò si deduce, per la formula del n.° 21, *sen* 5° = 0, 07845 90957 27845.

Sia adesso *sen* 1° = x, bisognerà, per ottener x, risolvere l'Equazione

$$16x^5-20x^3+5x=0,\ 07845\ 90957\ 27845.$$

Se, per abbreviare, si faccia il secondo membro = c, s'avrà presso a poco $5x-20x^3=c$, ed $x=\frac{1}{5}c+4(\frac{1}{5}c)^3$. Ora, $\frac{1}{5}c=0,01569\ 18191$, e $4(\frac{1}{5}c)^3=0,00001\ 5456$; dunque si ha per la prima approssimazione $x=0,01570\ 7275$; valore, che non è errato sennonchè

nell' ottava decimale. Per avern' uno più esatto, sia $x=0,01570\ 73+y$, si avrà, sostituendo nell' Equazione proposta, e trascurando il quadrato, e le altre potenze di y,

$$0.07845\ 90094\ 24927+4.98520177\,y$$
$$=0.07845\ 90957\ 27845; \text{ d'onde abbiamo}$$
$$y=0,\ 00000\ 00173\ 118207,$$
$$\text{ed } x, \text{ o } sen\ 1^\circ=0,\ 01570\ 73173\ 118207.$$

Da *sen* 1°, ossia $100'$ dedurrebonsi similmente i *seni* di $50'$, di $10'$, di $5'$, ed infine quello di $1'$.

XXVII. Le formule dell' articolo XIX. forniscono un gran numero di conseguenze, tra le quali servirà riportare quelle, che sono d'un uso più frequente. Se ne deducono subito le quattro seguenti

$$sen\,a\cos b=\tfrac{1}{2}R\,sen(a+b)+\tfrac{1}{2}R\,sen(a-b);$$
$$sen\,b\cos a=\tfrac{1}{2}R\,sen(a+b)-\tfrac{1}{2}R\,sen(a-b);$$
$$\cos a\cos b=\tfrac{1}{2}R\cos(a-b)+\tfrac{1}{2}R\cos(a+b);$$
$$sen\,a\,sen\,b=\tfrac{1}{2}R\cos(a-b)-\tfrac{1}{2}R\cos(a-b);$$

le quali servono a trasformare un prodotto di più seni, o coseni, in seni, e coseni *lineari*, o moltiplicati solamente per delle *costanti*.

XXVIII. Se in queste formule facciamo $a+b=p$, $a-b=q$, ciò che dà $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$, dedurremo

$$sen\,p+sen\,q=\frac{2}{R}sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$
$$sen\,p-sen\,q=\frac{2}{R}sen\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2};$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{R} \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2};$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{R} \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2};$$

nuove formule, che spesso s'impiegano nei calcoli trigonometrici per ridurre due termini a un solo.

XXIX. Finalmente da quest' ultime abbiamo ancora mediante la divisione, ricordandosi che $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\operatorname{tang} a}{R} = \frac{R}{\cot a}$, quelle che seguono:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)};$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \frac{\operatorname{sen} \frac{p+q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{p+q}{2}}{R};$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\operatorname{sen} \frac{p-q}{2}} = \frac{\cot \frac{p-q}{2}}{R};$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{sen\, p - sen\, q}{cos\, p - cos\, q} = \frac{cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)} = \frac{cot\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{R};$$

$$\frac{cos\, p + cos\, q}{cos\, q - cos\, p} = \frac{cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, cos\, \tfrac{1}{2}(p-q)}{sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, sen\, \tfrac{1}{2}(p-q)} = \frac{cot\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{tang\, \tfrac{1}{2}(p-q)};$$

$$\frac{sen\,(p+q)}{sen\, p + sen\, q} = \frac{2\, sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{2\, sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, cos\, \tfrac{1}{2}(p-q)} = \frac{cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{cos\, \tfrac{1}{2}(p-q)};$$

$$\frac{sen\,(p+q)}{sen\, p - sen\, q} = \frac{2\, sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{2\, sen\, \tfrac{1}{2}(p-q)\, cos\, \tfrac{1}{2}(p+q)} = \frac{sen\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{sen\, \tfrac{1}{2}(p-q)};$$

formule, che son l'espressione d'altrettanti Teoremi. Dalla prima resulta che *la somma dei seni di due archi stà alla differenza di quei medesimi seni come la tangente della semisomma degli archi stà alla tangente della lor semidifferenza.*

XXX. Se si fa $b = a$, e $q = 0$ nelle formule dei tre articoli precedenti, si avranno i resultati, che seguono:

$$cos^2\, a = \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R\, cos\, 2a;$$
$$sen^2\, a = \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R\, cos\, 2a;$$

$$R + cos\, p = \frac{2\, cos^2\, \tfrac{1}{2} p}{R};$$

$$R - cos\, p = \frac{2\, sen^2\, \tfrac{1}{2} p}{R};$$

$$sen\, p = \frac{2\, sen\, \tfrac{1}{2} p\, cos\, \tfrac{1}{2} p}{R};$$

$$\frac{sen\, p}{R + cos\, p} = \frac{tang\, \tfrac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{cot\, \tfrac{1}{2} p};$$

$$\frac{sen\, p}{R - cos\, p} = \frac{cot\, \frac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{tang\, \frac{1}{2} p};$$

$$\frac{R + cos\, p}{R - cos\, p} = \frac{cot^2\, \frac{1}{2} p}{R^2} = \frac{R^2}{tang^2\, \frac{1}{2} p}.$$

XXXI. Per isviluppare ancor qualche formula relativa alle tangenti, consideriamo l'espressione $tang\,(a+b) = \frac{R\, sen\,(a+b)}{cos\,(a+b)}$, nella quale la sostituzion dei valori di *sen* $(a+b)$ darà

$$tang\,(a+b) = \frac{R\,(sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a)}{cos\, a\, cos\, b - sen\, b\, sen\, a}.$$

Ora, si ha $sen\, a = \frac{cos\, a\ tang\, a}{R}$, e $sen\, b = \frac{cos\, b\ tang\, b}{R}$.

Sostituendo questi valori, e dividendo in seguito tutti i termini per $cos\, a\, cos\, b$, conseguiremo

$$tang\,(a+b) = \frac{R^2\,(tang\, a + tang\, b)}{R^2 - tang\, a\, tang\, b}.$$

Questo è il valore della tangente della somma di due archi, espresso per le tangenti di ciascun di questi archi: si troverebbe nell' istessa maniera per la tangente della lor differenza

$$tang\,(a-b) = \frac{R^2\,(tang\, a - tang\, b)}{R^2 + tang\, a\, tang\, b}.$$

Sia $b = a$, si avrà per la duplicazione degli archi la formula

$$tang\,2\,a = \frac{2\,R^2\,tang\,a}{R^2 - tang^2\,a},$$

d'onde resulterebbe

$$cot 2a = \frac{R^2}{tang 2a} = \frac{R^2}{2 tang\,a} - \tfrac{1}{2} tang\,a = \tfrac{1}{2} cot\,a - \tfrac{1}{2} tang\,a.$$

Sia $b = 2\,a$, si avrebbe per la triplicazione degli archi la formula

$$tang\,3\,a = \frac{R^2\,(tang\,a + tang\,2\,a)}{R^2 - tang\,a\,tang\,2\,a};$$

nella quale, se si sostituisca il valore di $tang\,2\,a$, proviene $tang\,3\,a = \frac{3\,R^2 tang\,a - tang^3\,a}{R^2 - 3\,tang^2\,a}$.

XXXII. Lo sviluppo delle formule trigonometriche, considerato in tutta la sua generalità, forma un ramo importante dell'Analisi, sopra il quale può consultarsi l'eccellente Opera d'*Euler* intitolata *Introduzione all' Analisi degli Infiniti*, tradotta, e arricchita di Note da Giovanni Labey. Noi crediamo frattanto di dover dimostrare ancora le formule, che servono ad esprimere i seni, e coseni in funzioni dell'arco; formule, la cui notizia è supposta nella Nota IV. seguente, e che d'altronde son necessarie per la costruzion delle Tavole.

Supponghiamo ora il raggio $= 1$; ciò non altera in nulla la generalità dei resultati, e si ha la formula $cos^2\,A + sen^2\,A = 1$, il cui primo membro può essere riguardato come il prodotto dei due fattori immaginarj $cos\,A + \sqrt{-1}\,sen\,A$, e $cos\,A - \sqrt{-1}\,sen\,a$. Se si moltiplicano insieme due fattori simili come $cos\,A + \sqrt{-1}\,sen\,A$, $cos\,B + \sqrt{-1}\,sen\,B$, il prodotto sarà $cos\,A\,cos\,B - sen\,A\,sen\,B + (sen\,A\,cos\,B + sen\,B\,cos\,A)\sqrt{-1}$, e si ridu-

e per conseguenza alla forma $\cos(A+B)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(A+B)$, la quale è simile a ciascun dei fattori. Si ha dunque in generale

$$(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)(\cos B+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} B)=\cos(A+B)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(A+B);$$

ed è osservabile che la moltiplicazione di questa sorte di quantità si eseguisce aggiungendo solamente gli archi: questa è una proprietà analoga a quella dei logaritmi. Se ne concluderà successivamente

$$(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)=\cos 2A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} 2A$$
$$(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)(\cos 2A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} 2A)=\cos 3A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} 3A$$
$$(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)(\cos 3A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} 3A)=\cos 4A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} 4A$$

ec.

Il primo prodotto è eguale a $(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^2$; il secondo è eguale a $(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^3$; e così di seguito. Dunque in generale, n essendo un numero intero qualunque, si avrà

$$(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n=\cos nA+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, nA.$$

Da ciò resulta, cangiando il segno di $\sqrt{-1}$,

$$(\cos A-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n=\cos nA-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, nA,$$

e da queste due equazioni, che sono una conseguenza l'una dell'altra, se ne dedurranno i valori separati di $\mathrm{sen}\, n A$, e $\cos n A$, cioè

$$\cos nA=\tfrac{1}{2}(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n+\tfrac{1}{2}(\cos A-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n,$$

$$\mathrm{sen}\, nA=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n-\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n.$$

XXXIII. Se si vogliono esprimere le medesime quantità per mezzo di serie, bisognerà sviluppare colla formula del binomio $(\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen} A)^n$, che darà

$$\cos^n A+\frac{n}{1}\cos^{n-1} A\,\mathrm{sen} A\sqrt{-1}-\frac{n.n-1}{1.2}\cos^{n-2} A\,\mathrm{sen}^2 A$$
$$-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cos^{n-3} A\,\mathrm{sen}^3 A\sqrt{-1}+\frac{n.n-1\,n-2.n-3}{1.2.3.4}$$
$$\cos^{n-4} A\,\mathrm{sen}^4 A+\text{ec.}$$

E questa quantità essendo il valore di $\cos n A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, n A$, si eguaglierà separatamente la parte

reale a $\cos n A$, e la parte immaginaria $= \sqrt{-1}$ $\operatorname{sen} n A$. Si avrà dunque.

$$\cos n A = \cos^n A - \frac{n.n-1}{1.2}\cos^{n-2} A \operatorname{sen}^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\cos^{n-4} A \operatorname{sen}^4 A - \text{ec.}$$

$$\operatorname{sen} n A = n\cos^{n-1} A \operatorname{sen} A - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cos^{n-3} A \operatorname{sen}^3 A + \text{ec};$$

serie, la cui legge è facile a conoscersi, e per mezzo delle quali si trova il seno, e il coseno d'un arco multiplo di A in una maniera molto più pronta che per le operazioni indicate nell'art. 24.

XXXIV. Poichè si ha $\operatorname{sen} A = \cos A \operatorname{tang} A$, queste serie possono mettersi sotto la forma

$$\cos nA = \cos^n A\left(1 - \frac{n.n-1}{1.2}\operatorname{tang}^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4 A - \text{ec.}\right),$$

$$\operatorname{sen} nA = \cos^n A\left(\frac{n}{1}\operatorname{tang} A - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\operatorname{tang}^3 A + \text{ec.}\right).$$

Sia $n = \frac{x}{A}$, e si avrà sostituendo questo valore, e conservando nel tempo medesimo il fattore $\cos^n A$,

$$\cos x = \cos^n A\left(1 - \frac{x.x-A}{1.2}\cdot\frac{\operatorname{tang}^2 A}{A^2} + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3.4}\cdot\frac{\operatorname{tang}^4 A}{A^4} - \text{ec.}\right),$$

$$\operatorname{sen} x = \cos^n A\left(\frac{x}{1}\cdot\frac{\operatorname{tang} A}{A} - \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3}\cdot\frac{\operatorname{tang}^3 A}{A^3} + \text{ec.}\right).$$

In queste formule si può prender A a piacere: supponghiamo A piccolissima; allora $\frac{\operatorname{tang} A}{A}$ sarà pochissimo differente dall'unità; poichè la tangente d'un arco piccolissimo è quasi eguale all'arco. Frattanto, fino a che l'arco non è zero, si ha $\operatorname{tang} A > A$ (1), ovvero $\frac{\operatorname{tang} A}{A} > 1$; si ha ad

---

Fig. 1. (1) AT è maggiore di AM perchè il triangolo ATC sta al settore ACM : : AT × ½ AC : AM × ½ AC : : AT : AM.

un tempo $A > \text{sen} A$ (1); dunque $\frac{\text{tang} A}{A} < \frac{\text{tang} A}{\text{sen} A}$, o $\frac{\text{tang} A}{A} < \frac{1}{\cos A}$. Da ciò si vede chiaramente che il rapporto $\frac{\text{tang} A}{A}$ è sempre compreso tra i limiti 1, e $\frac{1}{\cos A}$. Sia $A = 0$, si avrà $\cos A = 1$; dunque, poichè $\frac{\text{tang} A}{A}$ è compreso tra 1, e $\frac{1}{\cos A}$, bisognerà che si abbia esattamente $\frac{\text{tang} A}{A} = 1$.
Dunque facendo $A = 0$, si avrà $\cos x = \cos^n A$

$$\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.}\right),$$

$$\text{sen}\, x = \cos^n A \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}\right).$$

Resta da vedere ciò che diviene $\cos^n A$ allorchè A sempre diminuisce, ed infine diviene zero. Ora si ha $\frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A = 1 + \text{tang}^2 A$; dunque $\cos A = (1 + \text{tang}^2 A)^{-\frac{1}{2}}$, dunque $\cos^n A = (1 + \text{tang}^2 A)^{-\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} \text{tang}^2 A + \frac{n \cdot n + 2}{2.4} \text{tang}^4 A -$ ec. Sostituendo in luogo di n il suo valore $\frac{x}{A}$, si avrà

(1) AM è più grande di MP, perchè l'arco Fig. 1. MAN è più grande della corda MN.

$$\cos^n A = 1 - \frac{x}{2} A . \frac{\tang^2 A}{A^2} + \frac{x.x+2A}{2.4} A^2 . \frac{\tang^4 A}{A^4} - \text{ec.}$$

Se c'immaginiamo adesso che A diminuisca sempre di più, x restando il medesimo, il valore di $\cos^n A$ si approssimerà di più all'unità: in fine, se si fanno $A = 0$, e $\frac{\tang A}{A} = 1$, si avrà esattamente $\cos^n A = 1$. Dunque si hanno le formule

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.},$$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.},$$

per mezzo delle quali si potrà calcolare il seno, e il coseno d'un arco, la cui lunghezza è data in parti del raggio preso per unità.

XXXV. Questi medesimi valori posson essere espressi in una maniera succinta per mezzo degli esponenziali. Per questo bisogna rammentarsi che e essendo il numero, il cui logaritmo iperbolico è l'unità, abbiamo

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$$

Se in questa formula si fa $z = x\sqrt{-1}$, ne risulterà

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$$

Si avrebbe similmente, cangiando il segno di $\sqrt{-1}$,

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.} - \text{ec.}$$

Da ciò si ricava

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ec.},$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{ec.}:$$

serie, i cui secondi membri sono i valori trovati di $\cos x$, e $\operatorname{sen} x$. Dunque si ha

$$\cos x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2},\ \operatorname{sen} x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

donde proviene $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=$ $\sqrt{-1}\operatorname{tang} x$; formula, della quale abbiamo fatto uso nella *Nota* IV.

Le medesime formule danno $e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x$, $e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x$; dunque, dividendo l'una per l'altra, si avrà $e^{2x\sqrt{-1}}$ $=\frac{\cos x+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x}{\cos x-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x}=\frac{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}{1-\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}$, ovvero, prendendo i logaritmi di ciascun membro, $2x\sqrt{-1}=\log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}{1-\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}\right)$. Ma sappiamo che $\log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2z+\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{5}z^5+\text{ec.}$; mettendo dunque $\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x$ in luogo di z, e dividendo da una parte, e dall'altra per $2\sqrt{-1}$, si avrà

$x=\operatorname{tang} x-\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x+\text{ec.}$; formula semplicissima, che serve a calcolar l'arco per mezzo della sua tangente, allorchè questa è più piccola dell'unità.

XXXVI. Per applicar le formule precedenti alla determinazione del seno, e coseno d'un arco dato in gradi, e parti di grado, bisogna aver la lunghezza di quest'arco espressa in parti del raggio, ovvero, ciò che torna lo stesso, bisogna avere il rapporto di quest'arco al raggio. Ora il raggio essendo 1, la semi-circonferenza, o l'arco

di 200°=3, 14159 26535 89793a. Sia questo numero=π; la lunghezza dell'arco $\frac{m}{n}.100°$ sarà $\frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$: dunque, se si fa nelle formule precedenti $x=\frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$, che in seguito si ponga il valore di π, e si calcolino i coefficienti fino a sedici decimali, si avranno le formule seguenti

$\text{sen}(\frac{m}{n}.100°)=$	$\cos(\frac{m}{n}.100°)=$
$1{,}57079\ 63267\ 948966\ \frac{m}{n}$	$1{,}00000\ 00000\ 000000$
$-0{,}64596\ 40975\ 062463\ \frac{m^3}{n^3}$	$-1{,}23370\ 05501\ 361698\ \frac{m^2}{n^2}$
$+0{,}07969\ 26262\ 461670\ \frac{m^5}{n^5}$	$+0{,}25366\ 95079\ 010480\ \frac{m^4}{n^4}$
$-0{,}00468\ 17541\ 353187\ \frac{m^7}{n^7}$	$-0{,}02086\ 34807\ 633530\ \frac{m^6}{n^6}$
$+0{,}00016\ 04411\ 847874\ \frac{m^9}{n^9}$	$+0{,}00091\ 92602\ 748394\ \frac{m^8}{n^8}$
$-0{,}00000\ 35988\ 432352\ \frac{m^{11}}{n^{11}}$	$-0{,}00002\ 52020\ 423731\ \frac{m^{10}}{n^{10}}$
$+0{,}00000\ 00569\ 117292\ \frac{m^{13}}{n^{13}}$	$+0{,}00000\ 04710\ 874779\ \frac{m^{12}}{n^{12}}$
$-0{,}00000\ 00006\ 688035\ \frac{m^{15}}{n^{15}}$	$-0{,}00000\ 00063\ 866031\ \frac{m^{14}}{n^{14}}$
$+0{,}00000\ 00000\ 060669\ \frac{m^{17}}{n^{17}}$	$+0{,}00000\ 00000\ 656596\ \frac{m^{16}}{n^{16}}$
$-0{,}00000\ 00000\ 000438\ \frac{m^{19}}{n^{19}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 005294\ \frac{m^{18}}{n^{18}}$
$+0{,}00000\ 00000\ 000000\ \frac{m^{21}}{n^{21}}$	$+0{,}00000\ 00000\ 000034\ \frac{m^{20}}{n^{20}}$

I seni, e coseni degli archi da zero fino a $50°$ comprendono i seni, e coseni degli archi da $50°$ fino a $100°$, perchè abbiamo sen $(50°+z)=\cos(50°-z)$, e cos $(50°+z)=$ sen $(50°-z)$. Dunque nelle formule, che danno il valore di sen $\frac{m}{n}\,100°$, e cos $\frac{m}{n}\,100°$, si potrà sempre supporre $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, di modo che le serie saranno talmente convergenti che non sarà mai necessario calcolare che un piccol numero di termini, soprattutto se non s' abbia bisogno di molti decimali.

Se si fa successivamente $\frac{m}{n}=\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$; si troveranno i resultati, che seguono,

sen $10° =$ cos $90° = 0,\ 15643\ 44650\ 40231$
sen $20° =$ cos $80° = 0,\ 30901\ 69943\ 74947$
sen $30° =$ cos $70° = 0,\ 45399\ 04997\ 39547$
sen $40° =$ cos $60° = 0,\ 58778\ 52522\ 92473$
sen $50° =$ cos $50° = 0,\ 70710\ 67811\ 86548$
seu $60° =$ cos $40° = 0,\ 80901\ 69943\ 74947$
sen $70° =$ cos $30° = 0,\ 89100\ 65241\ 88368$
sen $80° =$ cos $20° = 0,\ 95105\ 65162\ 95154$
sen $90° =$ cos $10° = 0,\ 98768\ 83405\ 95138$
sen $100° =$ cos $0° = 1,\ 00000\ 00000\ 00000$,

i quali si accordano colle formule algebriche del n.° 22. Si troverà similmente, facendo $\frac{m}{n}=\frac{1}{100}$, il medesimo valore di sen $1°$, che abbiamo trovato nel n.° 26; e la gran facilità, con la quale si perviene a questi resultati, è una prova dell' eccellenza del metodo.

Della costruzione delle Tavole dei Seni.

XXXVII. I Dotti, ai quali si dee la prima costruzione delle Tavole dei seni, hanno fondato i lor calcoli sopra metodi ingegnosi; ma la lor ap-

plicazione era penosissima. L'Analisi ha dato dipoi dei metodi molto più speditivi per conseguir quest'intento; ma i calcoli essendo di già fatti, questi metodi sarebbero restati senza applicazione, se lo stabilimento del *sistema metrico* non ci avesse dato occasione di calcolar nuove Tavole conformi alla divisione decimale del circolo.

Per dare un'idea dei metodi, che si posson seguire nella costruzion delle Tavole, supponghiamo che si tratti di calcolare i seni di tutti gli archi di minuto in minuto da 1 fino a 10000 minuti, o 100 gradi; noi faremo il raggio $=1$, l'arco d'un minuto $= a$, e subito bisognerà trovare il seno ed il coseno dell'arco a, sino a una molto grande approssimazione.

Il raggio essendo 1, sappiamo che la semicirconferenza, o l'arco di $200^c = 3,14159\,26535\,897932$; dividendo questo numero per 20000, si ha l'arco d'un minuto o sia $a = 0,000157079632679489\,6$ valore esatto fino al ventesimo decimale. Quando un arco sia piccolissimo, il suo seno è sensibilmente eguale all'arco; e così abbiam presso a poco sen $a = 0,00015\,70796\,32679\,48966$. Ma questo valore è di già in errore alla decimaterza cifra decimale, la quale non è che la decima cifra significativa. Per averne uno più esatto, il mezzo il più semplice è di ricorrere alle formule dell'articolo XXXVI, nelle quali, se facciamo $\frac{m}{n} = \frac{1}{10000}$, si avrà immediatamente, per i due, o tre primi termini di ciascuna serie,

$$\text{sen } a = 0,00015\ 70796\ 32033\ 525563\ ,$$
$$\cos a = 0,99999\ 99876\ 62994\ 52400\ 5253\ ;$$

valori esatti sino alla vigesima decimale per il seno, e fino alla vigesimaquarta per il coseno.

XXXVIII. Conoscendo il seno, ed il coseno dell'arco d'un minuto indicato per a, per dedurne

successivamente i seni di tutti gli archi multipli di a, si farà nelle formule dell'articolo XXVIII, $p=x+a$, $q=x-a$. La prima, e la terza daranno per questa sostituzione, facendo sempre $R=1$,

$$\text{sen}(x+a)=2\cos a \,\text{sen}\, x-\text{sen}(x-a),$$
$$\cos(x+a)=2\cos a \cos+-\cos(x-a).$$

Resulta da queste formule che, se abbiamo una serie d'archi in progressione aritmetica, la cui differenza sia a, i loro seni formeranno una serie ricorrente, la di cui *scala di relazione* è $2\cos a,-1$, vale a dire, che due seni consecutivi A, e B essendo calcolati, si troverà il seguente C moltiplicando B per $2\cos a$, A per -1, ed aggiungendo i due prodotti, d'onde avremo $C=2B\cos a-A$. I coseni dei medesimi archi formeranno egualmente una serie ricorrente, la cui *scala di relazione* è $2\cos a,-1$, si avrà dunque necessariamente

$\text{sen}\,0=0$	$\cos 0=1$
$\text{sen}\,a=\text{sen}\,a$	$\cos a=\cos a$
$\text{sen}\,2a=2\cos a\,\text{sen}\,a$	$\cos 2a=2\cos a\cos a-1$
$\text{sen}\,3a=2\cos a\,\text{sen}\,2a-\text{sen}\,a$	$\cos 3a=2\cos a\cos 2a-\cos a$
$\text{sen}\,4a=2\cos a\,\text{sen}\,3a-\text{sen}\,2a$	$\cos 4a=2\cos a\cos 3a-\cos 2a$
$\text{sen}\,5a=2\cos a\,\text{sen}\,4a-\text{sen}\,3a$	$\cos 5a=2\cos a\cos 4a-\cos 3a$
ec.	ec.

XXXIX. Non si tratta adesso che di eseguire le operazioni indicate sostituendo i valori di sen a, e cos a. Se si vuol costruire delle Tavole di seni con 10 decimali, servirà prendere i valori di sen a, e cos a approssimati fino a 16 decimali, cioè,

$$\text{sen}\, a=0,00015\ 70796\ 320335,$$
$$\cos a=0,\ 99999\ 99876\ 629945:$$

ma siccome cos a differisce pochissimo dall'unità, vi è un mezzo d'abbreviazione, di cui convien profittare. Sia $K=2(1-\cos a)=0,00000\ 00246\ 740110$; si avrà $2\cos a=2-K$; ciò darà.

$$\text{sen}(x+a)-\text{sen}\,x=\text{sen}\,x-\cos(x-a)-K\,\text{sen}\,x,$$
$$\cos(x+a)-\cos x=\cos x-\text{sen}(x-a)-K\cos x.$$

Per avere il termine sen $(x+a)$ serve di aggiun-

gere al termine precedente sen x la differenza sen $(x+a)$ — sen x, la quale sarà sempre piccolissima: ora questa differenza è, seguendo la formula, eguale a una differenza simile di già calcolata sen x—sen $(x-a)$, meno il prodotto di sen x per il numero costante K. Questa moltiplicazione è dunque la sola operazione un poco lunga, che si deggia fare per dedurre un seno dai due precedenti. Ma bisogna osservare 1.° che non si ha bisogno di conoscere il prodotto se non che fino alla sedicesima decimale; ciò che darà pochissime cifre da calcolare: 2.° che queste moltiplicazioni posson essere molto abbreviate formando avanti i prodotti del numero costante 246740110 per 1, 2, 3 fino a 9; perchè con questo mezzo si avranno immediatamente i prodotti parziali, che risultano dalle differrenti cifre del moltiplicatore sen x, e non resterà altro che a far l'addizione di questi prodotti, limitandosi sempre alla sedicesima decimale.

Gli stessi ragionamenti dovranno essere seguitati nel calcolo dei coseni; ed allorchè si sarà prolungata l'una, e l'altra serie fino a 50°, la Tavola sará completa.

XL. È necessario, lo ripetiamo, di calcolare i seni con 16 decimali, vale à dire con cinque, o sei decimali di più di quelli, che non si voglian realmente, a fine d'essere assicurati che gli errori, i quali possono moltiplicarsi nel corso di 5000 operazioni, non influiscano sopra la decima decimale degli ultimi resultati. Fatto il calcolo si toglieranno i decimali superflui, e non si conserveran nella Tavola che 10 decimali.

Del resto, quando si tratta di eseguir tanti calcoli, si dee cercare di verificarne i resultati più spesso che sia possibile. Nell'esempio, che abbiam riportato, d'una Tavola calcolata di minuto in minuto, sarebbe necessario di calcolare antecedentemente i seni, e coseni di grado in gra-

do; ciò sarà, di 100 termini in cento termini, una verificazione utilissima. Ora, per calcolare i seni di grado in grado, si hanno le formule, e valori, che seguono:

$$\text{sen}(x+1^\circ)-\text{sen}\,x=\text{sen}\,x-\text{sen}(x-1^\circ)-h\,\text{sen}\,x,$$
$$\cos(x+1^\circ)-\cos x=\cos x-\cos(x-1^\circ)-h\cos x,$$
$$\text{sen}\,1^\circ=0,01570\ 73173\ 11820\ 676,$$
$$\cos 1^\circ=0,99987\ 66324\ 31660\ 599,$$
$$h=2(1-\cos 1^\circ)=0,00024\ 67350\ 36978\ 802.$$

I seni calcolati di grado in grado si verificano da loro stessi di dieci in dieci per i valori di già conosciuti di sen 10°, sen 20°, ec. In fine, quando la Tavola intiera è costrutta, si può ancora verificarla in quante maniere si vorrà mediante l'equazione

$$\text{sen}(100^\circ-x)+\text{sen}(20^\circ-x)+\text{sen}(20^\circ+x)=\text{sen}(60^\circ-x)+\text{sen}(60^\circ+x).$$

XLI. I seni tali quali resultan dai calcoli, che abbiamo indicati, sono espressi in parti di raggio, e si chiamano *seni naturali:* ma abbiam conosciuto nella pratica che vi è molto vantaggio a servirsi dei logaritmi dei seni in luogo dei seni medesimi; in conseguenza la più parte delle Tavole non contengono i seni naturali, ma solamente i lor logaritmi. Si concepisce che i seni essendo calcolati, è stato facile di trovarne i logaritmi; ma siccome la supposizione del raggio $=1$ renderebbe negativi tutti i logaritmi dei seni, si è prescritto di prendere il raggio $=10000000000$, vale a dire si son moltiplicati per 10000000000 tutti i seni trovati nella supposizione del raggio $=1$. Per questo mezzo il raggio, o seno di 100°, che s'incontra frequentemente nel calcolo, ha per logaritmo 10 unità, e bisognerebbe che gli angoli fossero molto più piccoli di quello che non s'incontrano nella pratica, perchè i loro seni avessero de' logaritmi negativi.

I logaritmi dei seni essendo trovati, si deducono facilissimamente i logaritmi delle tangenti

con delle semplici sottrazioni; perchè, siccome si ha $\tang x = \frac{R \operatorname{sen} x}{\cos x}$, ne proviene $\log. \tang x = 10 + \log \operatorname{sen} x - \log. \cos x$. Quanto ai logaritmi delle secanti, questi si troveranno in una maniera più semplice per mezzo dell'equazione $\sec. x = \frac{R^2}{\cos x}$. Ed è appunto perchè vi si può supplir facilmente, che non si sono inseriti nelle Tavole se non che i logaritmi dei seni, e quelli delle tangenti.

Resterebbe a spiegare le specie d'interpolazioni, di cui uno si serve sì per trovare i logaritmi degli archi, che contengono delle frazioni di minuto, sì per trovare gli archi, che corrispondono a un logaritmo dato di seno, o tangente, allorchè questo logaritmo cade tra due logaritmi delle Tavole. Ma per queste particolarità non si può far meglio che consultare le spiegazioni, da cui le Tavole son sempre accompagnate.

Principj per la risoluzione dei Triangoli rettilinei.

XLII. *In qualunque triangolo rettangolo il raggio stà al seno d'uno degli angoli acuti, come l'ipotenusa stà al lato opposto a quell'angolo.*

Fig. 13. Sia ABC il triangolo proposto rettangolo in A; dal punto C, come centro, e con un raggio CD eguale al raggio delle Tavole, descrivete l'arco DE, che sarà la misura dell'angolo C; abbassate sopra CD la per-

pendicolare EF, che sarà il seno dell'angolo C. I triangoli CBA, CEF son simili, e danno la proporzione CE : EF : : CB : BA; dunque

R : sen C : : BC : BA.

XLIII. *In qualunque triangolo rettangolo il raggio stà alla tangente d'uno degli angoli acuti, come il lato adiacente a quest'angolo stà al lato opposto.*

Avendo descritto l'arco DE, come nell'articolo precedente, alzate sopra CD la perpendicolare DG, che sarà la tangente dell'angolo C. Dai triangoli simili CDG, CAB si avrà la proporzione CD : DG : : CA : AB; dunque

R : tang C : : CA : AB.

XLIV. *In un triangolo rettilineo qualunque i seni degli angoli son come i lati opposti ai medesimi.*

Sia ABC il triangolo proposto, AD la perpendicolare abbassata dal vertice A sopra il lato opposto BC: potranno succeder due casi; Fig. 4.

1.° Se la perpendicolare cade dentro il triangolo ABC, i triangoli rettangoli ABD, ACD daranno, seguendo l'articolo XLII.,

R : sen C : : AC : AD,
R : sen B : : AB : AD.

In queste due proporzioni gli estremi essendo eguali, si potrà con i medj intavolare la proporzione

sen C : sen B : : AB : AC.

2.° Se la perpendicolare cade fuori del Fig. 5.

triangolo ABC, i triangoli rettangoli ABD, ACD daranno ancora le proporzioni

R : sen C :: AC : AD

R : sen ABD :: AB : AD.

Da ciò si ricava sen C : sen ABD :: AB : AC. Ma l'angolo ABD è supplemento di ABC, o B; dunque sen ABD = sen B; dunque si ha ancora

sen C : sen B :: AB : AC.

XLV. *In qualunque triangolo rettilineo il coseno d'un angolo stà al raggio come la somma dei quadrati dei lati, che comprendon quest' angolo, meno il quadrato del terzo lato, stà al doppio rettangolo de' due primi lati, vale a dire, si ha* $\cos B : R :: \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 : 2\,AB \times BC$, ovvero $\cos B = R \times \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,AB \times BC}$.

Fig. 4. Sia ancor quì abbassata dal vertice A la perpendicolare AD sopra il lato BC.

1.° Se questa perpendicolare cade dentro il triangolo, si avrà* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD$; (* 123.)

dunque $BD = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,BC}$. Ma nel triangolo rettangolo ABD si ha R : sen BAD :: AB : BD; inoltre, l'angolo BAD essendo complemento di B, si ha sen BAD = cos B;

dunque $\cos B = \dfrac{R \times BD}{AB}$, ovvero, sostituen-

do il valore di BD,

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,AB \times BC}.$$

2.° Se la perpendicolare cade al di fuori del triangolo, si avrà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times BD$*; dunque $BD = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\,BC}$. Ma nel triangolo rettangolo BAD si ha sempre sen BAD, o $\cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, e l'angolo ABD essendo supplemento di ABC, o B, si ha * $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$ dunque, sostituendovi il valor di BD, si avrà ancora

Fig. 5.

* 13. 3.

* XI.

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,AB \times BC}.$$

Sieno A, B, C i tre angoli d'un triangolo rettilineo; a, b, c i lati, che son a loro respettivamente opposti, si avrà, seguendo quest' ultima proposizione, $\cos B = R.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Il medesimo principio essendo applicato a ciascuno degli altri due angoli darà similmente $\cos A = R.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos C = R.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

XLVI. Queste tre formule sole servono per risolvere tutti i problemi della Trigonometria rettilinea perchè, essendo date tre delle sei quantità **A**, **B**, **C**, a, b, c, si hanno da queste formule l'equazioni necessarie, onde determinar le altre tre rimanenti. Bisogna per conseguenza che i principj già esposti, e quelli, che vi si potrebbero aggiungere, non sieno se non una conseguenza di queste tre formule fondamentali.

In effetto il valore di cos B dà

$$\text{sen}^2 B = R^2 - \cos^2 B = R^2 . \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} =$$

$$\frac{R^2}{4a^2c^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4); \text{ dunque}$$

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{B}{2abc} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}.$$

Il secondo membro essendo una funzione di a, b, c, nella quale queste tre lettere entrano tutte egualmente, è chiaro che si può far la permutazione di due di queste lettere a piacimento, e che così avremo $\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}$.

Questo è il principio notato nell n.° XLIV. E dal medesimo si dedurrebbero facilmente i principj dei numeri XLII., e XLIII.

XLVII. *In qualunque triangolo rettilineo la somma dei due lati stà alla lor differenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati stà alla tangente della semidifferenza di questi medesimi angoli.*

Fig. 4. e 5. Perchè dalla proporzione AB : AC :: sen C : sen B si ricava AC + AB : AC − AB :: sen B + sen C : sen B − sen C. Ma dalle formule dell'articolo XXIX. si ha sen B + sen C : sen B − sen C ::

$\tang \frac{B+C}{2} : \tang \frac{B-C}{2}$; dunque

$AC+AB : AC-AB :: \tang \frac{B+C}{2} : \tang \frac{B-C}{2}$;

che è quanto abbiamo enunciato.

Con questo piccol numero di principj siamo in stato di risolvere tutti i casi della Trigonometria rettilinea.

Risoluzioni dei triangoli rettangoli.

XLVIII. Sia A l'angolo retto d'un triangolo rettangolo proposto; B, e C gli altri due angoli; sia *a* l'ipotenusa, *b* il lato opposto all'angolo B, e *c* il lato opposto all'angolo C. Bisognerà rammentarsi che i due angoli B, e C son complementi l'uno dell'altro, e che così, seguendo i differenti casi, si può prendere sen C = cos B, sen B = cos C, e similmente tang B = cot C, tang C = cot B. Ciò posto, i differenti Problemi, che si possono aver da risolvere sopra i triangoli rettangoli, riduconsi sempre ai quattro casi seguenti.

I.° CASO

XLIX. *Essendo data l'ipotenusa* a, *ed un lato* b, *trovare il terzo lato, ed i due angoli acuti.*

Per determinare l'angolo B si ha la proporzione * $a : b :: R : \text{sen } B$. Conoscendo l'angolo B, si conoscerà nel medesimo tempo il suo complemento 100°—B=C: si potreb-

*XLII.

be anco aver C direttamente per la proporzione $a : b :: R : \cos C$.

Quanto al terzo lato c, si può trovare in due maniere. Dopo aver trovato l'angolo B, si può fare la proporzione * $R : \cot B :: b : c$, che darà il valore di c, ovvero si può prender direttamente il valore di c dall'equazione $c^2 = a^2 - b^2$, che dà $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), e per conseguenza

*XLIII.

$$\log c = \tfrac{1}{2} \log(a+b) + \tfrac{1}{2} \log(a-b).$$

II.° CASO.

L. *Essendo dati due lati* b, *e* c *dell'angolo retto, trovar l'ipotenusa, e gli angoli.*

*XLII. Si avrà l'angolo B dalla proporzione * $c : b :: R : \tan B$. In seguito si avrà $C = 100^\circ - B$. Si troverà ancora C direttamente colla proporzione $b : c :: R : \tan C$.

Conoscendo l'angolo B, si troverà l'ipotenusa per la proporzione $\operatorname{sen} B : R :: b : a$, ovvero si può aver a direttamente dall'equazione $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$; ma quest'espressione, nella quale $b^2 + c^2$ non può decomporsi in fattori, non è comoda per il calcolo logaritmico.

III.° CASO.

LI. *Essendo dati l'ipotenusa* a, *ed un angolo* B, *trovare gli altri due lati* b, *e* c.

Si faranno le proporzioni $R : \operatorname{sen} B :: a : b$, $R : \cos B :: a : c$, le quali daranno i valori di b, e c. Quanto all'angolo C, egli è eguale al complemento B.

IV.° CASO.

LII. *Essendo dato un lato* b *dell' angolo retto, ed uno degli angoli acuti, trovar l'ipotenusa, e l'altro lato.*

Conoscendo uno degli angoli acuti, si conoscerà l'altro; così si può suppor conosciuto il lato b, e l'angolo opposto B. In seguito, per determinare a, e c, si avranno le proporzioni

$$\text{sen B} : \text{R} :: b : a, \quad \text{R} : \cot \text{B} :: b : c.$$

Risoluzione dei triangoli rettilinei in generale.

Sieno A, B, C i tre angoli d'un triangolo rettilineo proposto, e sieno a, b, c i lati, che sono a loro respettivamente opposti: i differenti Problemi, che possono aver luogo affine di determinar tre di queste quantità per mezzo dell'altre tre, si ridurranno sempre ai quattro casi seguenti.

I.° CASO.

LIII. *Essendo dati il lato* a, *e due degli angoli del triangolo, trovar i due altri lati* b, *e* c.

I due angoli cogniti faranno conoscere il terzo; in seguito si troveranno i due lati b, e c per le due proporzioni *

$$\text{sen A} : \text{sen B} :: a : b,$$
$$\text{sen A} : \text{sen C} :: a : c.$$

* XLIV

triangolo OED rettangolo in E si ha $DE = \frac{OE . \text{tang} DOE}{R} = \frac{\cos BC . \text{tang} AB}{R}$; dunque R : cos B :: sen BC : $\frac{\cos BC \text{ tang } AB}{R}$ :: $\frac{R . \text{sen } BC}{\cos BC}$: tang AB, o infine

R : cos B :: tang BC : tang AB.

Se facciamo, come sopra, $BC = a$, ed $AB = c$, si avrà R : cos B :: tang a : tang c, ovvero $\cos B = \frac{R \text{ tang } c}{\text{tang } a} = \frac{\text{tang } c \cot a}{R}$. Il medesimo principio applicato all' angolo C darà

$$\cos C = \frac{R \text{ tang } b}{\text{tang } a} = \frac{\text{tang } b \cot a}{R}.$$

LXIV. *In qualunque triangolo sferico rettangolo il raggio stà al coseno d' un lato dell' angolo retto come il coseno dell' altro lato stà al coseno dell' ipotenusa.*

Sia ABC il triangolo proposto rettangolo in A; dico che si avrà R : cos AB :: cos AC : cos BC. Fig. 19.

Perchè la costruzione essendo la medesima che nelle due Proposizioni precedenti, il triangolo ODF rettangolo in D, ove si ha l' ipotenusa OF=R, darà OD=cos DOF=cos AC; in seguito il triangolo ODE rettangolo in E darà $OE = \frac{OD \cos DOE}{R} = \frac{\cos AC \cos AB}{R}$. Ma nel triangolo rettangolo OEF si ha OE =

cos BC; dunque cos $BC = \frac{\cos AC \cos AB}{R}$, ovvero, ciò che torna lo stesso,

$$R : \cos AC :: \cos AB : \cos BC.$$

Questo terzo principio si esprime coll'equazione $R \cos a = \cos b \cos c$, e non è suscettibile di fornirne una seconda, come le due precedenti, perchè la permutazione fatta tra b, e c non porta alcun cangiamento all'equazione.

LXV. Per mezzo di questi tre principj generali si posson trovarne tre altri necessarj per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli. Questi ultimi principj potrebbero dimostrarsi direttamente ciascuno con una costruzione particolare; ma è preferibile di dedurli dai tre primi per mezzo dell' Analisi, come adesso faremo.

L'equazioni $\text{sen} B = \frac{R \text{ sen } b}{\text{sen } a}$, $\cos C = \frac{R \text{ tang } b}{\text{tang } a}$ danno, mediante la divisione, $\frac{\cos C}{\text{sen } B} = \frac{\text{tang } b}{\text{sen } b}$; $\frac{\text{sen } a}{\text{tang } a} = \frac{\cos a}{\cos b} =$ (seguendo il terzo principio) $\frac{\cos c}{R}$. Si ha dunque questo quarto principio

$$\text{sen } B : \cos C :: R : \cos c,$$

dal quale risulta ancora, per la permutazion delle lettere, sen C : cos B :: R : cos b.

Il primo, ed il secondo principio danno $\text{sen } B = \frac{R \text{ sen } b}{\text{sen } a}$, $\cos B = \frac{R \text{ tang } c}{\text{tang } a}$: da queste

si deduce $\frac{\text{sen B}}{\text{cos B}}$, ovvero $\frac{\text{tang B}}{\text{R}} = \frac{\text{sen } b \text{ tang } a}{\text{sen } a \text{ tang } c} =$ $\frac{\text{R sen } b}{\text{cos } a \text{ tang } c} =$ (in virtù del terzo principio) $\frac{\text{R}^2 \text{sen } b}{\text{cos } b \text{ cos } c \text{ tang } c} = \frac{\text{tang } b}{\text{sen } c}$. Dunque si ha per quinto principio l'equazione $\text{tang B} = \frac{\text{R tang } b}{\text{sen } c}$, ovvero l'analogia, o proporzione

$$\text{R} : \text{tang B} :: \text{sen } c : \text{tang } b,$$

dalla quale resulta ancora, per la permutazion delle lettere,

$$\text{R} : \text{tang C} :: \text{sen } b : \text{tang } c.$$

Finalmente queste due formule danno $\text{tang B} \times \text{tang C} = \text{R}^2 . \frac{\text{tang } b \text{ tang } c}{\text{sen } c \text{ sen } b} = \frac{\text{R}^4}{\text{cos } b \text{ cos } c} =$ (in virtù del terzo principio) $\frac{\text{R}^3}{\text{cos } a}$. Dunque $\text{R}^3 =$ $\text{cos } a \text{ tang B tang C}$, ovvero $\text{cot B cot C} = \text{R cos } a$, o

$$\text{tang B} : \text{cot C} :: \text{R} : \text{cos } a.$$

Questo è il sesto, ed ultimo principio: egli non è suscettibile di fornirci un'altra equazione, perchè la permutazione tra C, e B non vi produce alcun cangiamento.

Ecco la recapitolazione di questi sei principj, quattro de'quali danno ciascuno due equazioni.

I. $\text{R sen } b = \text{sen } a \text{ sen B}$, $\text{R sen } c = \text{sen } a \text{ sen C}$
II. $\text{R tang } b = \text{tang } a \text{ cos C}$, $\text{R tang } c = \text{tang } a \text{ cos B}$
III. $\text{R cos } a = \text{cos } b \text{ cos } c$,
IV. $\text{R cos B} = \text{sen C cos } b$, $\text{R cos C} = \text{sen B cos } c$
V. $\text{R tang } b = \text{sen } c \text{ tang B}$, $\text{R tang } c = \text{sen } b \text{ tang C}$
VI. $\text{R cos } a = \text{cot B cot C}$.

Ne resultano dieci equazioni contenenti tutte le relazioni, che possono esistere fra tre de' cinque elementi B, C, a, b, c, di maniera che, essendo cognite due di queste quantità, si conoscerà immediatamente la terza per il suo seno, suo coseno, sua tangente, o cotangente.

LXVI. È da notarsi che quando un elemento verrà solamente determinato per il suo seno, vi saran due valori di questo elemento, e per conseguenza due triangoli, che soddisfaranno alla questione. Perchè il medesimo seno, che appartiene ad un angolo, e a un arco, appartiene ancora al suo supplemento. Non succede l'istesso allorchè l'elemento incognito sarà determinato per il suo coseno, sua tangente, o sua cotangente. Allora si potrà decidere, per il segno di questo valore, se l'elemento, di cui si tratta, è più grande, o più piccolo di 100°. L'elemento sarà più piccolo di 100° se il suo coseno, la sua tangente, o la sua cotangente ha il segno +; e sarà più grande che 100° se una di queste linee ha il segno —. Si potrebbero altresì stabilire sopra questo soggetto dei precetti generali, che non saranno se non conseguenze delle sei dimostrate equazioni.

Per esempio, resulta dall'equazione $R\cos a = \cos b \cos c$ che i tre lati d'un triangolo sferico rettangolo son tutti minori di 100°, ovvero che dei tre lati due son più grandi di 100°, ed il terzo minore. Nessun'altra combinazione

non può rendere il segno di $\cos b \cos c$ simile a quello di $\cos a$, com' esige questa equazione.

Medesimamente l' equazione $R \tang C = \sen b \tang c$, ove $\sen b$ è sempre positivo, prova che $\tang C$ ha sempre il medesimo segno di $\tang c$. Laonde *in qualunque triangolo sferico rettangolo un angolo obliquo, e il lato che gli è opporto, son sempre della medesima specie, e vale a dire son ambedue più grandi, o ambedue più piccoli di* 100°.

Risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

LXVII. Un triangolo sferico può aver tre angoli retti, ed allora i suoi tre lati sono di 100°; può aver due angoli retti solamente, ed allora i lati opposti sono ambedue di 100°, e resta un angolo col lato opposto, che son misurati l' uno e l' altro dal medesimo numero di gradi. Questi due triangoli non possono, come si vede, dar luogo ad alcun Problema; si può dunque fare astrazione da questi casi particolari per non considerar che i triangoli, i quali hanno un solo angolo retto.

Sia A l' angolo retto, B, e C gli altri due angoli, che noi chiamiamo angoli obliqui; sia a l' ipotenusa opposta all' angolo A, b, e c i lati opposti agli angoli B e C. Essendo date due delle cinque quantità B, C, a, b, c, la risoluzione del triangolo si ridurrà sempre ad uno de' sei casi seguenti.

I.° CASO

LXVIII. *Essendo data l'ipotenusa* a, *ed un lato* b, *si troveranno i due angoli* B, e C, *ed il terzo lato* c *per l'equazioni*

$$\text{sen } B=\frac{R \text{ sen } b}{\text{sen } a}, \cos C=\frac{\text{tang } b \cot a}{R}, \cos c=\frac{R \cos a}{\cos b}.$$

L' angolo C non può lasciar alcuna incertezza nè tampoco il lato c; quanto all' angolo B, egli debb' essere della medesima specie che il lato dato b.

II.° CASO

LXIX. *Essendo dati i due lati dell' angolo retto* b, e c, *si troveranno l' ipotenusa* a, *e gli angoli* B, e C *per l' equazioni*

$$\cos a=\frac{\cos b \cos c}{R}, \text{tang} B=\frac{R \text{ tang } b}{\text{sen } c}, \text{tang } C=\frac{R \text{ tang } c}{\text{sen } b}.$$

Non vi è alcuna ambiguità in questo caso.

III.° CASO.

LXX. *Essendo data l' ipotenusa* a, *e un angolo* B, *si avranno i due lati* b e c, *e l' altro angolo* C *dall' equazioni*

$$\text{sen} b=\frac{\text{sen } a \text{ sen } B}{R}, \text{tang } c=\frac{\text{tang } a \cos B}{R}, \cot C=\frac{\cos a \text{ tang } B}{R}.$$

Gli elementi c, e C son determinati senza ambiguità da queste formule; quanto al lato b, sarà della medesima specie che l' angolo B.

IV.° CASO.

LXXI. *Essendo dato il lato dell' angolo retto* b *con l' angolo opposto* B, *si troveranno* a, c *e* C *per mezzo delle formule*

$$\operatorname{sen} a = \frac{R \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},\ \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tang} b \cot B}{R},\ \operatorname{sen} C = \frac{R \cos B}{\cos b}.$$

In questo caso i tre elementi incoguiti son determinati da dei seni; così la questione è suscettibile di due soluzioni. E' evidente infatti che il triangolo ABC, e il triangolo AB'C sono ambedue rettangoli in A, e hanno ambedue il medesimo lato $AC = b$, ed il medesimo angolo opposto $B = B'$. Del resto, i valori doppj si deggiono combinare in modo che c, e C sieno della medesima specie; in seguito la specie di c, e b determina quella di a, per l' ispezion della formula $\cos b \cos c = R \cos a$; ma il valore di a si determinerà direttamente per mezzo dell' equazione Fig. 11.

$$\operatorname{sen} a = \frac{R \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}.$$

V.° CASO

LXXII. *Essendo dato un lato dell' angolo retto* b *con l' angolo adiacente* C, *si troveranno gli altri tre elementi* a, c, B *per mezzo delle formule*

$$\cot a = \frac{\cot b \cos C}{R},\ \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C}{R},\ \cos B = \frac{\cos b \operatorname{sen} C}{R}.$$

In questo caso non può restare veruna incertezza sopra la specie degli elementi incogniti.

VI.° CASO.

LXXIII. *Essendo dati gli angoli obliqui* B, e C, *si troveranno i tre lati* a, b, c per le formule

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{R}, \cos b = \frac{R \cos B}{\text{sen } C}, \cos c = \frac{R \cos C}{\text{sen } B}.$$

Ed anco in questo caso non resta alcuna incertezza.

OSSERVAZIONE.

LXXIV. Il triangolo sferico, di cui A, B, C sono gli angoli, ed a, b, c i lati opposti, corrisponde sempre a un triangolo polare, di cui gli angoli son supplementi dei lati a, b, c, e i lati supplementi degli angoli A, B, C; di maniera che, se si chiamano A′, B′, C′ gli angoli del triangolo polare, e a', b', c' i lati opposti a questi angoli, si avrà

$$A' = 200^\circ - a,\ B' = 200^\circ - b,\ C' = 200^\circ - c,$$
$$a' = 200^\circ - A,\ b' = 200^\circ - B,\ c' = 200^\circ - C.$$

Ciò posto, se un triangolo sferico ha un lato a eguale al quadrante, egli è patente che l'angolo correspettivo A′ del triangolo polare sarà retto, e così questo triangolo sarà rettangolo. Dunque i due dati, che si debbono avere, oltre il lato di 100°, per risolvere il triangolo proposto, serviranno a trovare la soluzione del triangolo polare, ed in conseguenza quella del triangolo proposto. Da ciò si potrebbero ricavar delle formule simili alle precedenti per risolvere direttamente i triangoli sferici, che hanno un lato di 100°.

Un triangolo isoscele si divide in due triangoli rettangoli eguali in tutte le loro parti, e così la risoluzione dei triangoli sferici isosceli dipende ancora da quella dei triangoli sferici rettangoli.

Sia ABC un triangolo sferico tale che i due lati AB, BC sien supplementi l'uno dell'altro; se si prolungano i lati AB, AC fino al loro incontro in D, è chiaro che BC, e BD saranno eguali, essendo supplementi d'un medesimo lato AB; d'altronde è visibile che le parti del triangolo BCD essendo cognite, si conoscono ancora quelle del triangolo ABC, che è il resto del fuso AD, e reciprocamente. Dunque la risoluzione del triangolo ABC, nel quale due lati fanno insieme 200°, si riduce a quella del triangolo isoscele BCD, o a quella del triangolo rettangolo BDE, ch'è la metà di CBD. Fig 12

Allorchè i due lati AB, BC son supplementi l'uno dell'altro, bisogna che gli angoli opposti BAC, ACB sieno ancor supplementi l'uno dell'altro, perchè BCD è supplemento di BCA; ora BCD=D=A. Dunque non si può avere $a+c=200^\circ$ senza avere ad un tempo $A+C=200^\circ$, ciò ch'è reciproco.

Da questo si vede che la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli comprende 1.° quella dei triangoli sferici, che hanno un lato eguale al quadrante; 2.° quella dei triangoli sferici isosceli; 3.° quella dei triangoli sferi-

ci, nei quali la somma di due lati e quella dei due angoli opposti son l'una e l'altra di 200°.

Principj per la risoluzione dei triangoli sferici in generale.

LXXV. *In qualunque triangolo sferico i seni degli angoli son come i seni dei lati opposti.*

Fig. 13. Sia ABC un triangolo sferico qualunque, dico che si avrà sen B : sen C :: sen AC : sen AB.

Dal vertice A abbassate l'arco AD perpendicolare sopra il lato opposto BC, i triangoli rettangoli ABD, ACD daranno le proporzioni

sen B : R :: sen AD : sen AB,
R : sen C :: sen AC : sen AD.

Moltiplicando queste due equazioni per ordine, e omettendo i fattori comuni, si avrà

sen B : sen C :: sen AC : sen AB.

Fig. 14. Se la perpendicolare AD cade al di fuori del triangolo ABC, si avrebbero le due medesime proporzioni, in una delle quali sen C indicherà sen ACD; ma sia come l'angolo ACD e l'angolo ACB son supplementi l'uno dell'altro, i loro seni sono eguali, e così abbiamo sempre nel triangolo ACB sen B : sen C :: sen AC : sen AB.

Sieno *a*, *b*, *c* i lati respettivamente opposti agli angoli A, B, C si avrà, seguendo questa proporzione, sen A : sen *a* :: sen B :

sen b : : sen C : sen c; ciò che dà la doppia equazione:

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}.$$

LXXVI. *In qualunque triangolo sferico il coseno d'un angolo è eguale al quadrato del raggio moltiplicato per il coseno del lato opposto, meno il prodotto del raggio per i coseni dei lati adiacenti, il tutto diviso per il prodotto dei seni di questi medesimi lati; e vale a dire che si ha quanto all'angolo* C, *per esempio*,

$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b}$. *Si avrebbe similmente per gli altri due angoli*

$\cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c}$, e $\cos B = \frac{R^2 \cos b - R \cos a \cos c}{\text{sen } a \text{ sen } c}$.

Sia ABC il triangolo proposto, nel quale si fa BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$. Dal punto O, centro della sfera, tirate le rette indefinite OA, OB, OC; prendete OD a piacimento, e per il punto D conducete DE nel piano OCA, e DF nel piano OCB, ambedue perpendicolari a OD, le quali incontrino in E, e F i raggi OA, OB prolungati; infine congiungete EF. Fig. 15.

L'angolo D del triangolo EDF, è per costruzione, l'angolo che fanno tra loro i pian

OCA, OCB; così l'angolo EDF è eguale all'angolo C del triangolo sferico ACB: ora nei triangoli DEF, OEF si ha * [* XLV.]

$$\frac{\cos EDF}{R} = \frac{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{EF}^2}{2\,DE\,.\,DF},$$

$$\frac{\cos EOF}{R} = \frac{\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{EF}^2}{2\,OE\,.\,OF}.$$

Prendendo dalla seconda il valore di $\overline{EF}^2$, e sostituendolo nella prima, si avrà

$$\frac{\cos EDF}{R} = \frac{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{OE}^2 - \overline{OF}^2 + 2OE.FO.\frac{\cos EOF}{R}}{2\,DE\,.\,DF}.$$

Ora $\overline{OE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{OD}^2$, ed $\overline{OF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{OD}^2$; si ha dunque

$$\cos EDF = \frac{OE\,.\,OF\,.\cos EOF - \overline{OD}^2\,.\,R}{DE\,.\,DF}.$$

Non si tratta adesso se non che di sostituire in questa equazione i valori relativi al triangolo sferico. Ora si ha $EDF = C$, $EOF = AB = c$, $\frac{OE}{DE} = \frac{R}{\text{sen}\,DOE} = \frac{R}{\text{sen}\,b}$, $\frac{OF}{DF} = \frac{R}{\text{sen}\,DOF} = \frac{R}{\text{sen}\,a}$, $\frac{OD}{DE} = \frac{\cos DOE}{\text{sen}\,DOE} = \frac{\cos b}{\text{sen}\,b}$, $\frac{OD}{DF} = \frac{\cos DOF}{\text{sen}\,DOF} = \frac{\cos a}{\text{sen}\,a}$. Dunque

$$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}.$$

Questo principio, il quale essendo successivamente applicato ai tre angoli somministra tre equazioni, serve per la risoluzione di tutti i problemi della Trigonometrìa sferica: esso ha, per rapporto ai triangoli sferici, la medesima generalità che il principio dell' articolo XLV., per rapporto ai triangoli piani. Infatti poichè si hanno sempre tre elementi dati, per mezzo dei quali bisogna determinar gli altri tre, è chiaro che questo principio dà l'equazioni necessarie per risolvere il problema, equazioni che appartiene all' analisi di sviluppare ulteriormente ond'averne, secondo i differenti casi, le formule le più semplici, e le più adattate al calcolo logaritmico.

LXXVII. Poichè il principio, di cui parliamo, è assolutamente generale, egli dee contenere tutti gli altri principj relativi ai triangoli sferici, e specialmente il principio del n.° 75. Questo è ciò, ch'è facile verificare.

Difatti l'equazione $\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$ dà $R^2 - \cos^2 C$, ovvero $\operatorname{sen}^2 C = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{R^2 \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b - R^2 \cos^2 a \cos^2 b + 2R^3 \cos a \cos b \cos c - R^4 \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b}.$$

Ora $\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b = (R^2 - \cos^2 a)(R^2 - \cos^2 b) = R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b$. Dunque sostituendo, ed estraendo la radicc, si avrà

$$\operatorname{sen} C = \frac{R}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \sqrt{(R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b - R^2 \cos^2 c + 2R \cos a \cos b \cos c)}.$$

Sia, per abbreviare, $Z = \sqrt{(R^4 - R^2 \cos^2 a -}$

$R^2\cos^2 b - R^2\cos^2 c + 2R\cos a\cos b\cos c$); si avrà dunque

$\text{sen}\, C = \dfrac{RZ}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}$, ovvero $\dfrac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, c} = \dfrac{RZ}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b\,\text{sen}\, c}$.

I valori di cos A, e cos B daranno similmente $\dfrac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, a} = \dfrac{RZ}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b\,\text{sen}\, c}$, $\dfrac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, b} = \dfrac{RZ}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b\,\text{sen}\, c}$, perchè la quantità Z non cangia allorchè si fa la permutazione tra due delle quantità a, b, c; dunque si ha $\dfrac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \dfrac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} = \dfrac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, c}$: questo è il principio del n.° LXXV.

LXXVIII. I valori, che abbiamo trovati per cos C, e sen C, posson servire a trovare gli angoli d'un triangolo sferico, di cui si conoscano i tre lati; ma esistono delle altre formule più comode per il calcolo logaritmico.

Infatti, se nella formula $R^2 - R\cos C = 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} C$ si sostituisce il valore di cos C, si avrà

$$\frac{2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = 1 - \frac{\cos C}{R} = \frac{\cos a\cos b + \text{sen}\, a\,\text{sen}\, b - R\cos c}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}.$$

Il numeratore di questa espressione si riduce a $R\cos(a-b) - R\cos c$; ora, per mezzo della formula $R\cos q - R\cos p = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(p-q)$*, si trova $R\cos(a-b) - R\cos c = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(c-b+a)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(c-a+b)$; dunque

* XXVIII

$$\frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{c+b-a}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b},$$

$$\text{ovvero sen}\tfrac{1}{2}C = R\sqrt{\left\{\frac{\text{sen}\,\frac{c+b-a}{2}\,\text{sen}\,\frac{c+a-b}{2}}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}\right\}}.$$

E' evidente che si avrebbero delle formule simili ond'esprimere sen $\frac{1}{2}$A, o sen $\frac{1}{2}$B per mezzo dei tre lati a, b, c.

LXXIX. Il problema generale della Trigonometria sferica consiste, come abbiamo già detto, in determinare tre delle sei quantità A, B, C, a, b, c per mezzo delle altre tre. E' necessario per questo oggetto d'avere dell'equazioni tra quattro di queste quantità, prese in tutte le maniere possibili; ora sei quantità combinate quattro a quattro, o due a due, danno $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ ovvero 15 combinazioni; così si avranno quindici equazioni da formare; ma, se non si considerano che le combinazioni essenzialmente differenti, queste quindici equazioni si ridurranno a quattro.

In effetto si ha 1.° la combinazione a b c A, che comprende, per la permutazion delle lettere, a b c A, a b c B, a b c C;

2.° La combinazione a b AB, di dove resultano ab AB; b c BC, ac AC;

3.° La combinazione ab AC, che comprende le sei a b AC, a b BC, a c AB, ac BC, bc AB, bc AC;

4.° In fine la combinazione a ABC, che abbraccia le tre aABC, bABC, cABC, cABC.

La totalità delle combinazioni è di quindici, ma si vede che realmente non ve ne sono che quattro differenti.

LXXX. L'equazione $\cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c}$ rappresenta digià la prima combinazione $abcA$, e quelle che ne dipendono.

Per formar l'eqnazione corrispondente alla combinazione $a\,b$ AB, bisogna eliminare c dalle due formule, che danno i valori di cosA, e cosB; ma l'eliminazione è stata già fatta (art. 77), ed il resultato è $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b}$.

La terza combinazione si forma dalla relazione tra a, b, A, C; in virtù di questa avendo le due equazioni

$$\cos A \text{ sen } b \text{ sen } c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c,$$
$$\cos C \text{ sen } b \text{ sen } a = R^2 \cos c - R \cos b \cos a,$$

si eliminerà tosto $\cos c$, ed avremo $R \cos A \text{ sen } c + \cos C \text{ sen } a \cos b = R \cos a \text{ sen } b$: ponendo in seguito in questa quì il valore $\text{sen } c = \frac{\text{sen } a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$, si avrà, per la terza combinazione,

$$\cot A \text{ sen } C + \cos C \cos b = \cot a \text{ sen } b.$$

Finalmente per avere la relazione tra A,B,C,a, osservo che nell' equazion precedente il termine $\cot a \text{ sen } b = R \cos a \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} = R \cos a \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}$; dunque, moltiplicando quest'equazione per sen A, si avrà

$$R \cos A \text{ sen } C = R \cos a \text{ sen } B - \text{sen } A \cos C \cos b.$$

Se in quest' equazione si permutano tra di loro le lettere A, e B, come pure a, e b, si avrà
$R \cos B \operatorname{sen} C = R \cos b \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B \cos C \cos a$.
E da queste due si ricava (eliminando cos b.)
$R^2 \cos A \operatorname{sen} C + R \cos B \operatorname{sen} C \cos C = \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 C$.
Dunque in ultimo

$$\cos a = \frac{R^2 \cos A + R \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C};$$

ch' è la relazione cercata tra A, B, C, a, ovvero la quarta delle equazioni necessarie alla risoluzione dei triangoli sferici.

LXXXI. Quest' ultima equazione tra A, B, C, a offre una mirabile analogia con la prima tra a, b, c, A; e si può render ragione di questa analogia per la proprietà dei triangoli polari, o supplementari. Difatto si sa che il triangolo, i di cui angoli sono A, B, C, ed i lati opposti a, b, c, corrisponde sempre a un triangolo polare, i cui lati sono 200° — A, 200°—B, 200°—c, e gli angoli opposti 200°— a, 200°—b, 200°—c. Ora il principio dell' articolo LXXVI essendo applicato a quest' ultimo triangolo, ne resulta $\cos(200^\circ - a) =$

$$\frac{R^2 \cos(200^\circ - A) - R \cos(200^\circ - B) \cos(200^\circ - C)}{\operatorname{sen}(200^\circ - B) \operatorname{sen}(200^\circ - C)},$$

che riducesi a

$$\cos a = \frac{R^2 \cos A + R \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

come lo abbiamo trovato in altra maniera.

Questa formula risolve immediatamente il caso ove si voglia determinare un lato per mezzo

dei tre angoli; ma, affine d'avere una fomula più comoda per il calcolo logaritmico, si sostituirà il valore di $\cos a$ nell'equazione $1 - \frac{\cos a}{R} =$

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{R^2}, \text{ che darà } \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{R^2} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C - R \cos A}{2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = \frac{-R \cos(B+C) - R \cos A}{2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

xxviii E perchè si ha in generale* $R \cos p + R \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$, questa equazione si riduce a

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{R^2} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

ove bisogna osservare che il secondo membro, benchè sotto una forma negativa, è nulladimeno sempre positivo. Imperciocchè si ha in generale $\operatorname{sen}(x - 100^\circ) = \frac{\operatorname{sen} x \cos 100^\circ - \cos x \operatorname{sen} 100^\circ}{R}$ $= -\cos x$; dunque $-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) = \operatorname{sen}\left(\frac{A+B+C}{2} - 100^\circ\right)$; quantità, che è sempre positiva, perchè $A+B+C$ essendo sempre compreso tra 200°, e 600°, l' angolo $\frac{1}{2}(A+B+C) - 100^\circ$ è compreso tra zero, e 200°; in oltre $\cos \frac{1}{2}(B+C-A)$ è sempre positivo, perchè $B+C-A$ non può sorpassare 200°, e di fatto, nel triangolo polare il lato $200^\circ - A$ è più piccolo che la somma degli altri due $200^\circ - B$, $200^\circ - C$; dunque si ha $200^\circ - A < 400^\circ - B - C$, ovvero $B + C - A < 200^\circ$.

Essendo così assicurati che il resultato sarà

sempre positivo, si avrà, per determinare un lato per mezzo degli angoli, la formula.

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = R\sqrt{\left\{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cdot\cos\frac{B+C-A}{2}}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}\right\}}.$$

LXXXII. Bisogna far vedere adesso come da queste formule generali si può dedur quelle, che riguardono i triangoli sferici rettangoli. Per quest' effetto si farà $A = 100°$, tanto nelle quattro formule principali che in quelle, che ne derivano per la permutazion delle lettere. E subito l' equazione $\cos A\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c = R^2\cos a - R\cos b\cos c$, darà, per questa sostituzione,

$$R\cos a = \cos b\cos c \qquad (1).$$

Le derivate dall' equazion generale non contengono A, e così non danno alcuna nuova relazione nel caso di $A = 100°$.

L' equazione $\frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a} = \frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b}$ dà, nel caso di $A = 100°$,

$$\frac{R}{\text{sen}\,a} = \frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b} \qquad (2).$$

E la derivata $\frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a} = \frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,c}$ darà egualmente $\frac{R}{\text{sen}\,a} = \frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,c}$; ma questa qui pure è una derivata dall' equazione (2).

L' equazione $\cot A\,\text{sen}\,C + \cos C\cos b = \cot a\,\text{sen}\,b$ dà, nel caso di $A = 100°$, $\cos C\cos b = \cot a\,\text{sen}\,b$, ovvero

$$\cos C\,\text{tang}\,a = R\,\text{tang}\,b \qquad (3).$$

La derivata $\cot C \operatorname{sen} A + \cos A \cos b = \cot c$ $\operatorname{sen} b$ dà, nel medesimo caso, $R \cot C = \cot c$ $\operatorname{sen} b$, ovvero

$$R \operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C \quad (4).$$

Finalmente la quarta equazion principale $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = R^2 \cos A + R \cos B \cos C$, e la sua derivata $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b = R^2 \cos B + R \cos A \cos C$ danno, nel caso di $A = 100°$, $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = R \cos B \cos C$, e $\operatorname{sen} C \cos b = R \cos B$, ovvero

$$\cot B \cot C = R \cos a, \quad (5)$$

$$\operatorname{sen} C \cos b = R \cos B. \quad (6)$$

Queste sono le sei equazioni, sopra le quali la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli è fondata.

LXXXIII. Termineremo questi principj con la dimostrazione delle *Analogie di Nepero*, che servono a semplicizzare più casi della risoluzione dei triangoli sferici.

Per la combinazion dei valori di $\cos A$, e $\cos C$ espressi in a, b, c, noi abbiamo di già ottenuta l'equazione *

*LXXX.

$$R \cos A \operatorname{sen} c = R \cos a \operatorname{sen} b - \cos C \operatorname{sen} a \cos b.$$

Questa quì dà, per una semplice permutazione,

$$R \cos B \operatorname{sen} c = R \cos b \operatorname{sen} a - \cos C \operatorname{sen} b \cos a.$$

Dunque sommando queste due equazioni, e riducendo, si avrà

$$\operatorname{sen} c (\cos A + \cos B) = (R - \cos C) \operatorname{sen} (a + b).$$

Ma, poichè $\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$, si ha

$$\operatorname{sen} c (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B) = \operatorname{sen} C (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)$$

e $\operatorname{sen} c (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B) = \operatorname{sen} C (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)$.

Dividendo successivamente queste due equazioni per la precedente, si avrà

$$\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\cos \text{A}+\cos \text{B}}=\frac{\text{sen C}}{\text{R}-\cos \text{C}}\cdot\frac{\text{sen}\,a+\text{sen}\,b}{\text{sen}\,(a+b)},$$

$$\frac{\text{sen A}-\text{sen B}}{\cos \text{A}+\cos \text{B}}=\frac{\text{sen C}}{\text{R}-\cos \text{C}}\cdot\frac{\text{sen}\,a-\text{sen}\,b}{\text{sen}\,(a+b)}.$$

E riducendo queste qui per mezzo delle formule degli articoli XXIX., e XXX., ne verrà

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\cot\tfrac{1}{2}\text{C}.\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})=\cot\tfrac{1}{2}\text{C}.\frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

Dunque, essendo dati i due lati a, e b con l'angolo compreso C, si troveranno gli altri due angoli A, e B per mezzo delle analogie

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b) : \cos\tfrac{1}{2}(a-b) :: \cot\tfrac{1}{2}\text{C} : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}),$$

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b) : \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b) :: \cot\tfrac{1}{2}\text{C} : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}).$$

Se si applicano queste medesime analogie al triangolo polare del triangolo ABC, bisognerà mettere $200^\circ-\text{A}$, $200^\circ-\text{B}$, $200^\circ-a$, $200^\circ-b$, $200^\circ-c$ in luogo di a, b, A, B, C respettivamente, e si avranno per resultato quest' altre due analogie

$$\cos\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) : \cos\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b),$$

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) : \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b),$$

per mezzo delle quali, essendo dati un lato c, ed i due angoli adiacenti A e B, si potran trovare gli altri due lati a, e b. Queste quattro proporzioni son conosciute sotto il nome d'*Analogie di Nepero*.

Risoluzione dei Triangoli sferici in generale:

La risoluzione dei triangoli sferici comprende sei casi generali, che noi svilupperem successivamente.

I.° CASO

LXXXIV. *Essendo dati i tre lati* a, b, c, *si troverà un angolo qualunque, per esempio, l'angolo* A *opposto al lato* a, *con la formula*

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\left\{\frac{\text{sen}\,\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\,\frac{a+c-b}{2}}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}\right\}}.$$

II.° CASO

LXXXV. *Essendo dati due lati* a, *e* b *con l'angolo* A *opposto ad uno di questi lati, trovare il terzo lato* c, *e gli altri due angoli* B, *e* C.

1.° L'angolo B si troverà per mezzo dell'equazione $\text{sen}\,B = \frac{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a}$.

2.° Per aver l'angolo C bisogna risolvere l'equazione

$$\cot a\,\text{sen}\,C + \cos C \cos b = \cot a\,\text{sen}\,b.$$

Sia preso per questo effetto un angolo ausiliario φ in modo che si abbia $\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos b\,\text{tang}\,A}{R}$, ovvero $\cot A = \frac{\cos b \cos\varphi}{\text{sen}\varphi}$; que-

sto valore di cot A essendo sostituito nell'equazion da risolvere, dà $\frac{\cos b}{\operatorname{sen}\varphi}$ ($\cos\varphi$ sen C + sen φ cos C) = cot a sen b, d'onde abbiamo

$$\operatorname{sen}(C+\varphi)=\frac{\operatorname{tang} b \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{tang} a}.$$

Per mezzo di questo artifizio si vede che i due termini incogniti dell'equazione proposta si riducono a un solo, di dove è facile rilevar l'angolo C.

3.° Il lato c si troverà per mezzo dell'equazione

$$\operatorname{sen} c=\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

Si può ancora determinarlo direttamente con la risoluzion dell'equazione

$$R \cos b \cos c + \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c = R^2 \cos a.$$

Per questo effetto, sia $\cos A \operatorname{sen} b = \frac{R \cos b \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$, ovvero $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\cos A \operatorname{tang} b}{R}$, si avrà $\frac{\cos b}{\cos\varphi}(\cos c\cos\varphi+\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\varphi)=R\cos a$. Dunque, cercando adesso l'ausiliario φ per l'equazione $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\cos A \operatorname{tang} b}{R}$, si avrà il lato c mediante l'equazione

$$\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}.$$

Questo secondo caso può avere due solu-

zioni, come il caso analogo dei triangoli rettilinei.

III.° CASO.

LXXXVI. *Essendo dati due lati* a, *e* b *con l'angolo compreso* C, *trovare gli altri due angoli* A, *e* B, *ed il terzo lato* c.

1.° Gli angoli A, e B, si trovan per mezzo di queste due equazioni

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos C \cos b}{\operatorname{sen} C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos C \cos a}{\operatorname{sen} C},$$

nelle quali i secondi membri potrebbero esser ridotti a un sol termine per mezzo d'un' angolo ausiliario; ma è più semplice, in questo caso, servirsi delle analogie di Nepero, che danno

$$\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C \,.\, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{A+B}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C \,.\, \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}.$$

2.° Conoscendo gli angoli A, e B, si potrà calcolare il terzo lato c per mezzo dell'equazione $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \,.\, \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$; ma, per determinar c direttamente, si ha l'equazione

$$R^2 \cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C + R \cos a \cos b.$$

Sia preso l'ausiliario ϕ in modo che s'ab-

bia sen b cos C = cos b tang φ, ovvero tang $\varphi = \frac{\cos C \operatorname{tang} b}{R}$, s' avrà

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos\varphi} . \cos(a - \varphi).$$

IV.° CASO.

LXXXVII. *Essendo dati due angoli* A, *e* B *col lato adiacente* c, *trovare gli altri due lati* a, *e* b, *ed il terzo angolo* C.

1.° I due lati a, e b son dati dalle formule

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen} c},$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}.$$

Ma si possono calcolare più facilmente servendosi delle analogie di Nepero, cioè,

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} : \operatorname{sen}\frac{A-B}{2} :: \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c : \operatorname{tang}\frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2} : \cos\frac{A-B}{2} :: \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c : \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}.$$

2.° Conoscendo a, e b, si troverà C per mezzo dell' equazione sen $C = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A}$; ma si può ancora trovar C direttamente con l' equazione

$$R^2 \cos C = \cos c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - R \cos A \cos B.$$

Sia preso l' ausiliario φ in modo che si abbia

$\cos c \operatorname{sen} B = \cos B \cot \varphi$, ovvero $\cot \varphi = \frac{\cos c \operatorname{tang} B}{R}$,

si avrà

$$\cos C = \cos B . \operatorname{sen} \frac{(A - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Questo caso, ed il precedente non lasciano alcuna indeterminazione.

V.° CASO.

LXXXVIII. *Essendo dati due angoli* A, *e* B *col lato* a *opposto ad uno di questi angoli, trovare i due altri lati* b, *e* c, *ed il terzo angolo* C.

1.° Il lato b si troverà con l'equazione $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a . \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$.

2.° Il lato c dipende dall'equazione

$$\cot a \operatorname{sen} c - \cos B \cos c = \cot A \operatorname{sen} B.$$

Sia $\cot a = \cos B \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$, ovvero $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos B \operatorname{tang} a}{R}$,

si avrà $\frac{\cos B}{\operatorname{sen} \varphi} (\operatorname{sen} c \cos \varphi - \cos c \operatorname{sen} \varphi) = \cot A \operatorname{sen} B$: dunque

$$\operatorname{sen} (c - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} B \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tang} A}.$$

3.° L'angolo C si troverà con la risoluzione dell'equazione

$$\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - R \cos B \cos C = R^2 \cos A.$$

Sia a quest'effetto $\cos a \operatorname{sen} B = \frac{R \cos B \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$,

ovvero $\cot \varphi = \frac{\cos a \tang B}{R}$, si avrà $\frac{\cos B}{\operatorname{sen} \varphi} \times$ $(\operatorname{sen} C \cos \varphi - \cos C \operatorname{sen} \varphi) = R \cos A$; dunque

$$\operatorname{sen} (C - \varphi) = \frac{\cos A \operatorname{sen} \varphi}{\cos B}.$$

Questo quinto caso, come il secondo, è suscettibile di due soluzioni, conforme a ciò che ha per luogo nel caso analogo dei triangoli rettilinei.

VI.° CASO.

LXXXIX. *Essendo dati i tre angoli* A, B, C, *si troverà un lato qualunque, per esempio, il lato opposto all' engolo* A, *mediante la formula*

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a = R \sqrt{\left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}\right)}.$$

Si può osservare che di questi sei casi generali i tre ultimi potrebber dedursi dai tre primi, per la proprietà dei triangoli polari: in modo, che a parlar propriamente, non vi son che tre casi differenti nella risoluzion generale dei triangoli sferici. Il primo si risolve per una sola analogia come i triangoli rettangoli; il terzo si risolve in una maniera similmente semplice per mezzo delle *analogie* di Nepero. Quanto al secondo egli esige due analogie; ed ammette ancor qualche volta due soluzioni, mentre che il primo, ed il terzo non n' ammettono mai che una sola.

xc. Per distinguere nel secondo caso se, per dei valori particolari dati di A, a, b, vi son due triangoli, che soddisfacciano alla questione, o solamente uno, supponghiamo in primo luogo l'angolo $A < 100°$, e sien prolungati i due lati AC, AB fino a che si rincontrino di nuovo in A'. Se si prende l'arco $AC < 100°$, e si abbassi CD perpendicolare sopra AB, i lati AD, CD del triangolo rettangolo ACD saran tutti due più piccoli di 100°, la linea CD sarà la più piccola distanza dal punto C all'arco AB, e, prendendo $DB' = DB$, le oblique CB', CB saranno eguali, e tanto più lunghe quanto più si allontaneranno dalla perpendicolare. Sia $AC = b$, $CB = a$: si vede dunque che un triangolo, nel quale sia $A < 100°$, $b < 100°$, e $a < b$, ha necessariamente due soluzioni ACB, ACB'; ma se, supponendo sempre A, e b più piccoli di 100°, abbiamo $a > b$, allora il punto B' passerà al di là del punto A, e non vi sarebbe che una soluzione rappresentata da ABC. Sia in seguito $AC' > 100°$, se si abbassa la perpendicolare C'D' sopra ABA', si avrà medesimamente $C'D' < A'C'$; e l'arco C'B''' condotto tra D', ed A', sarà $>$ C'D' e $<$ C'A'; Dunque, se facciamo $AC' = b$, $C'B'' = C'B''' = a$, si vede che la supposizione $A < 100°$, e $b > 100°$ darà due soluzioni se $a + b < 200°$, e non ne darà che una se $a + b > 200°$, perchè allora il punto B''' passerebbe al di là di A'. Discutendo nell'istessa maniera il caso ove l'angolo A è $> 100°$, si po-

tranno stabilire ancora i requisiti che determinano se, nel caso II°, la questione ammette due soluzioni, o non ne ammette che una.

$$A<100^\circ, b<100^\circ \begin{cases} a>b & \text{una soluzione.} \\ a<b & \text{due soluzioni.} \end{cases}$$

$$A<100^\circ, b>100^\circ \begin{cases} a+b>200^\circ & \text{una soluzione.} \\ a+b<200^\circ & \text{due soluzioni.} \end{cases}$$

$$A>100^\circ, b<100^\circ \begin{cases} a+b>200^\circ & \text{due soluzioni.} \\ a+b<200^\circ & \text{una soluzione.} \end{cases}$$

$$A>100^\circ, b>100^\circ \begin{cases} a>b & \text{due soluzioni.} \\ a<b & \text{una sola soluzione.} \end{cases}$$

Non vi sarà che una soluzione se si ha $A=100^\circ$, ovvero $a=b$, ovvero $a+b=200^\circ$. Ve ne saranno due se $b=100^\circ$.

XCI. Questi medesimi resultati possono applicarsi al caso V°. per mezzo del triangolo polare, e se ne rileveranno i seguenti requisiti, che faranno conoscere se, per dei valori dati di A, B, a, vi sieno due triangoli, che soddisfacciano alla questione, o se non ve ne sia che uno.

$$a>100^\circ, B>100^\circ \begin{cases} A<B & \text{una soluzione.} \\ A>B & \text{due soluzioni.} \end{cases}$$

$$a>100^\circ, B<100^\circ \begin{cases} A+B<200^\circ & \text{una soluzione.} \\ A+B>200^\circ & \text{due soluzioni.} \end{cases}$$

$$a<100^\circ, B>100^\circ \begin{cases} A+B<200^\circ & \text{due soluzioni.} \\ A+B>200^\circ & \text{una soluzione.} \end{cases}$$

$$a<100^\circ, B<100^\circ \begin{cases} A<B & \text{due soluzioni} \\ A>B & \text{una soluzione} \end{cases}$$

Non vi sarà che una soluzione se una dell'egualità seguenti abbia luogo, $a=100^\circ$, $A=B$, $A+B=200^\circ$. E ve ne saranno due se $B=100^\circ$.

XCII. In tutti i casi, per rigettare le soluzioni inutili, o false, bisogna rammentarsi 1°. che qualunque angolo, e qualunque lato debb' esser più piccolo di 200°;

2°. Che gli angoli maggiori sono opposti a' lati maggiori, e reciprocamente, in modo che, se abbiamo $A > B$, bisogna che si abbia ancora $a > b$.

Esempj della risoluzione dei Triangoli sferici.

Fig. 15. XCIII. *Esempio* I. Sieno O, M, N tre punti situati in un piano inclinato all' orizzonte: se da questi tre punti si abbassano le perpendicolari OD, Mm, Nn sopra il piano orizzontale DEF, gli oggetti situati in O, M, N dovranno essere rappresentati sopra il piano orizzontale dalle projezioni D, m, n, e l' angolo MON da mDn. Ciò posto, essendo dato l'angolo MON, e le inclinazioni dei suoi due lati OM, ON sopra la verticale OD, si tratta di trovar l' angolo di projezione mDn.

Dal punto O come centro, e con un raggio $= 1$, descrivete una superficie sferica, che incontri in A, B, C i lati OM, ON, e la verticale OD; avrete un triangolo sferico ABC, i di cui tre lati son cogniti: si potrà dunque determinare l' angolo C eguale a mDn per mezzo della formula del primo caso.

Sia, per esempio, l' angolo MON $=$ AB $=$ 64°, 44, 60″, l' angolo DOM $=$ AC $=$ 98°, 12′, e l' angolo DON $=$ BC $=$ 105°, 42; si avrà per la formula citata,

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} C = R^2 . \frac{\text{sen } 28°, 57', 30'' \text{ sen } 35°, 87' 30''}{\text{sen } 98°, 12' \text{ sen } 105°, 42'};$$

valore, che si calcolerà così:

L.sen 28° 57′ 30″	...9,6373956	L.sen 98° 12′	...9,9998106
L.sen 35° 87′ 30″	...9,7276562	L.sen 105° 42′	...9,9984242
somma + 2 L.R.	39,3650518		19,99823,8
	19,9982348		
2 L. sen ½ C	 19,3668170		
L. sen ½ C	 9,6834085,	½ C = 32° 4′ 70″. 5	C = 64 9 41 .

Dunque l'angolo 64° 44′ 60″, misurato in un piano inclinato all'orizzonte, si riduce a 64° 9′ 41″ allorchè è projettato sul piano dell'orizzonte.

Questo Problema è utile nell'arte di levare di pianta allorchè il terreno, sopra il quale si opera, presenta delle ineguaglianze sensibili, e che si vogliono nonostante determinare le posizioni principali con molta esattezza.

XCIV. *Esempio* II. Conoscendo le latitudini di due punti del globo, e la loro differenza in longitudine, trovare la loro più corta distanza.

Immagineremo un triangolo sferico ACB segnato dal polo boreale C, e dai due punti A, e B, di cui si tratta; in questo triangolo si conosceranno l'angolo al polo ACB, ch'è la differenza in longitudine dei due punti A, e B, e i due lati compresi AC, CB, che sono i complementi delle latitudini dei punti A, e B. Si determinerà dunque il terzo lato AB per mezzo delle formule del caso III. Fig. 14.

Sien, per esempio, A, e B gli Osservatorj di Parigi, e di Pekino; la latitudine boreale d'uno di questi luoghi è di 54° 26′ 36″, quella dell'al-

tro è di $44^\circ 33' 73''$, e la lor differenza in longitudine è di $126^\circ 80' 56''$. Così s'avrà

$$a = 45^\circ 73' 64'',$$
$$b = 55\ 66\ 27,$$
$$C = 126\ 80\ 56.$$

Dietro a questi dati si avranno, per determinar c, le formule $\tang \varphi = \frac{\cos C \tang b}{R}$, $\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}$, delle quali ecco il calcolo:

$$\begin{array}{ll} \text{L. cos C} \ldots & 9,6114352 \\ \text{L. tang } b \ldots & 10,0776707 \\ \hline \text{L. tang } \varphi \ldots & 9,6891059. \end{array}$$

L'angolo φ, che danno le Tavole per mezzo di questo logaritmo-tangente, è $28^\circ 94' 23''$. Ma bisogna osservare che cos C è negativo, e così tang φ essendo negativa, si dee prendere $\varphi = -28^\circ 94' 23''$; questo valore darà $a - \varphi = 74^\circ 67' 87''$. Ciò posto, osservando che $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, si terminerà il calcolo così:

$$\begin{array}{ll} \text{L. cos } (a - \varphi). & 9,5880938 \\ \text{L. cos } b \ldots\ldots & 9,8071953 \\ \hline & 19,3952891 \\ \text{L. cos } \varphi \ldots\ldots\ldots & 9,9554823 \\ \text{L. cos } c \ldots\ldots\ldots & 9,4418068. \end{array}$$

Dunque la distanza cercata $c = 82^\circ 16' 05''$. Questa medesima distanza può esprimersi in miriametri per 821, 605, perchè un miriametro è la lunghezza d'un arco di 10 minuti, ed un metro è quella d'un arco d'un decimo di secondo.

XCV. *Esempio* III. Per dare un esempio del caso V.°, proponghiamoci di risolvere il triangolo sferico nel qual si conoscono i due angoli $A = 78^\circ 50$, $B = 54^\circ 0$, ed il lato opposto ad uno di essi $a = 99^\circ 20' 17''$. Col mezzo di questi dati si trova, secondo le osservazioni dell'articolo XCI., che non ha luogo che una soluzione, perchè abbiamo nello stesso tempo $a < 100^\circ$, $B < 100^\circ$, ed $A > B$. Ecco il calcolo di quest' unica soluzione.

1. Il lato b si troverà colla formula $\text{sen}\, b = \text{sen}\, a \dfrac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, A}$.

L. sen a	9,9999659
L. sen B	9,8751256
10 — L. sen A	0,0252525
L. sen a	9,9003440.

Questo quì somministra $b = 58^\circ 50' 14''$ o il suo supplemento $141^\circ 49' 89''$; ma, poichè l'angolo B è $< A$, bisogna che il lato b sia $< a$, laonde il primo valore è il solo, che possa aver luogo.

2°. Per aver il lato c si dee fare $\text{tang}\, \varphi = \dfrac{\cos B \,\text{tang}\, a}{R}$, $\text{sen}\,(c - \varphi) = \dfrac{\text{tang}\, B \,\text{sen}\, \varphi}{\text{tang}\, A} = \dfrac{\text{tang}\, B \cot A \,\text{sen}\, \varphi}{R^2}$;

		L. sen φ	9,9999220
L. cos B . ,	9,8204063	L. tang B — L R	0,0547193
L. tang a — L. R	1,9016731	L. cot A	9,5455236
L. tang φ . . .	11,7220794	L. sen $(c - \varphi)$ . .	9,6001649
	$\varphi = 98^\circ 79' 28''.8$		$c - \varphi = 26^\circ 7' 70''.5$.

Quì pure abbiamo la scelta di prendere per $c-\varphi$ il valore $26^\circ\ 7'\ 70'',5$, o il suo supplemento $173^\circ\ 92'\ 29'',5$; ma, prendendo questo secondo valore, si avrebbe $c > 200^\circ$; così bisogna tenersi al primo, che da $c = 124^\circ\ 81'\ 99'',3$.

3.° In ultimo, per calcolar direttamente l'angolo C, prenderemo le formule $\cot\varphi = \frac{\cos a \text{ tang B}}{R}$ (1), $\text{sen}(C-\varphi) = \frac{\cos A \text{ sen}\varphi}{\cos B}$.

	L. sen φ 9,9999563
L. cos *a* 8,0982928	L. cos A 9,5202711
L. tang B—L. R 0,0547193	L. R—L cos B. 0,1795937
L. cot. φ 8,1530121	L. sen (C—φ) 9,6998211
φ = 99° 9′ 45″. 5	C—φ = 33° 40′ 54″. 5
	φ . . 99 9 45 . 5
	C = 132 50 0 . 0.

Non si è potuto prender per $C-\varphi$ il supplemento di $33\ 40'\ 54'',5$, perchè ne sarebbe resultato per C un valore più grande di 200°. Così si vede che in effetto il Problema proposto non è suscettibile che d'una soluzione.

---

(1) L'angolo ausiliario φ non è lo stesso di quello, che ha servito per calcolare il lato c.

Nota. Quelli, che vorran conoscere le applicazioni utili della Trigonometria, non potranno far meglio che consultare il *Trattato di Topografia, d'Agrimensura, e Livellazione di M.r Puissant. Parigi* 1807.

APPENDICE

Contenente la risoluzione di diversi casi particolari della Trigonometria.

xcvi. La risoluzione dei triangoli, tale come noi l'abbiamo esposta, non lascia nulla da desiderare per ciò che riguarda la generalità. V'è nulladimeno qualche circostanza ove si può, con vantaggio, sostituire delle soluzioni particolari alle soluzioni generali, sia per abbreviare i calcoli, sia per rendere i resultati più esatti e più indipendenti dall'error delle Tavole. Noi risolveremo qualcheduno di questi casi particolari, scegliendo quelli, che sono d'un uso più frequente, e che conducono alle formule le più notabili.

Continueremo ad indicare con A, B, C, gli angoli del triangolo proposto, rettilineo o sferico, e per a, b, c i lati, che gli son respettivamente opposti. Supporremo di più il raggio delle Tavole$=1$; ciò che non altera la generalità dei resultati. Gli angoli A, B, C sono espressi nel calcolo o per gradi, o per le lunghezze assolute degli archi che gli misurano, questi archi essendo presi nel circolo, il cui raggio è 1. Se un angolo, o un arco x è piccolissimo, si potran mettere in luogo di sen x, e cos x i loro valori in serie, cioè, sen $x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+$ec., cos $x=1-\frac{x^2}{1.2}+$ec.; ma allora x debb'essere espresso in parti di raggio. Essendo un arco trovato in parti del raggio, per avere il suo valore in minu-

ti, bisogna moltiplicarlo per il numero dei minuti compresi nel raggio; questo numero è $\frac{20000}{\pi} =$ 6366, 1977237, ed il suo logaritmo $= 3, 80388 12297$.

§ I. *Dei triangoli rettilinei, di cui due angoli son piccolissimi.*

XCVII. Supponghiamo che gli angoli A, e B sien piccolissimi, e in conseguenza C ottusissimo; si potrà fare $\text{sen}\, A = A - \frac{1}{6} A^3$, $\text{sen}\, B = B - \frac{1}{6} B^3$, e $\text{sen}\, C = \text{sen}\,(A + B) = A + B - \frac{1}{6}(A + B)^3$. Se dunque si conosce il lato c cogli angoli adiacenti A, e B, si troveranno i due altri lati con le formule $a = \frac{c \,\text{sen}\, A}{\text{sen}\,(A + B)}$, $b = \frac{c\, \text{sen}\, B}{\text{sen}\,(A + B)}$, le quali, sostituendone i valori precedenti, e riducendo, divengono

$$a = \frac{c\,A}{A + B}\left(1 + \frac{2\,A\,B + B^2}{6}\right),$$

$$b = \frac{c\,B}{A + B}\left(1 + \frac{2\,A\,B + A^2}{6}\right);$$

e da queste risulta $a + b - c = \frac{1}{2} c\, A B$. Questi valori sono esatti sino all' esclusione di quelli, che contengono quattro dimensioni in A, e B.

XCVIII. Supponghiamo in secondo luogo che sieno dati i due lati a, e b, con l' angolo contenuto $C = 200° - \theta$, θ essendo piccolissimo; avremo in primo luogo $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \cos\theta = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = (a + b)^2 - a\,b\,\theta^2$; dunque

$$c = a + b - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\,b\,\theta^2}{a + b}.$$

In seguito l' angolo A si troverà per mezzo dell' equazione $\text{sen}\, A = \frac{a}{c}\,\text{sen}\, C = \frac{a}{c}\,\text{sen}\,\theta$, d' onde rica-

vasi, sostituendo il valore di c, e quello di sen θ,
$$\text{sen } A = \frac{a}{a+b}\left(\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab}{(a+b)}\,\theta^3 - \tfrac{1}{6}\theta^3\right) = \frac{a\theta}{a+b}$$
$$\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right).$$ Dunque $A = \text{sen } A + \frac{1}{6}\text{sen}^3 A$
$$= \frac{a\theta}{a+b} + \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^3}{6}.$$ Da questo si dedurrebbe il valor di B permutando tra loro le lettere a, e b; ma A essendo cognito, si ha immediatamente $B = \theta - A$. Se θ è dato in minuti, per aver A espresso pure in minuti, bisognerà nelle formule precedenti sostituire in luogo di A, e θ i rapporti $\frac{A}{R}$, $\frac{\theta}{R}$, essendo R il numero dei minuti compresi nel raggio. Si avrà ancora
$$c = a + b - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\cdot\left(\frac{\theta}{R}\right)^2,$$
$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right].$$

XCIX. Per dare un esempio di queste formule, sia $a = 1000^m$, $b = 2400^m$, $C = 199°32'$, ovvero $\theta = 68'$; s' avrà $a + b - c = \frac{1200000}{3400}\cdot\left(\frac{68}{R}\right)^2 = 0{,}037806$, d'onde $c = 3399^m, 962194$. In seguito abbiamo, per una prima approssimazione, $A = \frac{a\theta}{a+b} = 20'$, e $B = \theta - A = 48'$: ma la formula intera dà $A = 20$
$$\left[1 + \frac{2400\times1400}{6(3400)^2}\cdot\left(\frac{68}{R}\right)^2\right] = 19', 99988946,$$ ed in conseguenza $B = 48', 00011054$; valori, che deggiono esser esatti fino all' ultima decimale.

§. II. *Risoluzione del caso III. dei triangoli rettilinei per mezzo delle serie.*

c. Essendo dati i due lati a, e b, e l'angolo contenuto C, per trovar l'angolo B, si ha la proporzione $b : a :: \text{sen B} : \text{sen}(B + C)$, la quale dà $a\,\text{sen B} = b(\text{sen B} \cos C + \cos B\,\text{sen C})$, e per conseguenza $\frac{\text{sen B}}{\cos B} = \frac{b\,\text{sen C}}{a - b\cos C}$. Se in questa equazione si pongono in luogo dei seni, e coseni i loro valori in esponenziali immaginarj * s'avrà

* XXXV.

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})}.$$

Di quì abbiamo

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - b e^{-C\sqrt{-1}}}{a - b e^{C\sqrt{-1}}}.$$

Prendendo i logaritmi di ciascun membro, e sviluppando il secondo in serie colla formula conosciuta $L(a - x) = La - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \text{ec.}$, si avrà

$$2B\sqrt{-1} = \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}} + \frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}} + \text{ec.}$$
$$- \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}} - \text{ec.}$$

Dunque dividendo per $2\sqrt{-1}$, e osservando che $e^{-mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,\text{sen}\,mC$, otterremo

$$B = \frac{b}{a}\text{sen C} + \frac{b^2}{2a^2}\text{sen 2C} + \frac{b^3}{3a^3}\text{sen 3C} + \frac{b^4}{4a^4}\text{sen 4C} + \text{ec.}$$

Questo è il valore dell'angolo B, espresso in parti di raggio, dato per una serie, la di cui legge è semplicissima, e che sarà tanto più convergente quanto b sarà più piccolo per rapporto ad a.

Il valore, che abbiam trovato dee soddisfare ancora all' equazione $\tang(B+\frac{1}{2}C)=\frac{a+b}{a-b}$ $\tang\frac{1}{2}C$, ch' è la medesima di $\tang\frac{1}{2}(A-B)$ $=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$, e non differisce che per la forma dall'equazione $\frac{\sen B}{\cos B}=\frac{b\sen C}{a-b\cos C}$.

101. L'angolo B essendo cognito, si avrà il terz'angolo $A=200^\circ-B-C$. Quanto al terzo lato c, egli dipende dall' equazione $c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$, la quale dà, per l'estrazione della radice,

$$c=a-b\cos C+\frac{b^2}{2a}\sen^2 C+\frac{b^3}{2a^2}\sen^2 C\cos C-\text{ec.}$$

Ma questa serie non ha una legge regolare, e non può esser perciò continuata a piacimento. Al contrario si può trovare una serie semplicissima per mezzo del valore del logaritmo *iperbolico* di c. Infatti è facil vedere esser la quantità $a^2-2ab\cos C+b^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})(a-be^{-C\sqrt{-1}})$, perchè il prodotto sviluppato di questi due *fattori* dà
$a^2-ab(e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}})+b^2$, ovvero $a^2-2ab\cos C+b^2$.
Si ha dunque $c^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})(a-be^{-C\sqrt{-1}})$.
Prendendo i logaritmi di ciascun membro, verrà

$$2Lc=La-\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}-\text{ec.}$$
$$+La-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\text{ec.}$$

Dunque, riducendo di nuovo, ed in virtù della formula $e^{mC\sqrt{-1}}+e^{-mC\sqrt{-1}}=2\cos mC$, s'avrà;

$$Lc=La-\frac{b}{a}\cos C-\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C-\frac{b^3}{3a^3}\cos 3C-\text{ec.};$$

serie non meno elegante di quella, che dà il valore di B: bisognerà moltiplicare i suoi differenti termini per il *modulo* 0,43429448, se si vuole che i logaritmi sien quelli delle Tavole ordinarie.

§. III. *Risoluzione del terzo caso dei triangoli sferici per mezzo delle serie.*

CII. Si è fatto vedere nel paragrafo antecedente che il valore di x dedotto dall'equazione $\tang x = \frac{m+n}{m-n} \tang \frac{1}{2} C$ può esprimersi con questa serie

$$x = \tfrac{1}{2} C + \frac{n}{m} \operatorname{sen} C + \frac{n^2}{2m^2} \operatorname{sen} 2C + \frac{n^3}{3m^3} \operatorname{sen} 3C + \text{ec.}$$

Ora, in un triangolo sferico, se si conoscono i due lati a, e b, e l'angolo contenuto C, si ha, per mezzo delle *analogie* di Nepero, * LXXXVI.

$$\cot \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \cos \frac{1}{2}a \operatorname{sen} \frac{1}{2}b}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b - \cos \frac{1}{2}a \operatorname{sen} \frac{1}{2}b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C,$$

$$\cot \frac{A+B}{2} = \frac{\cos(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\cos(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b - \operatorname{sen} \frac{1}{2}a \operatorname{sen} \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \operatorname{sen} \frac{1}{2}a \operatorname{sen} \frac{1}{2}b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C.$$

Dunque, in virtù della formula precedente, e supponendo sempre $b < a$, s'avrà

$$\frac{A-B}{2} = 100^\circ - \tfrac{1}{2} C - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \operatorname{sen} C - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \operatorname{sen} 2C$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} b}{3 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a} \operatorname{sen} 3C - \text{ec.},$$

$$\frac{A+B}{2}=100^\circ-\tfrac{1}{2}C+\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,C-\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,2\,C$$
$$+\frac{\text{tang}^3\frac{1}{2}b}{3\cot^3\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,3\,C-\text{ec.},$$

serie, delle quali la legge è semplicissima, e che saranno tanto più convergenti quanto b sarà più piccolo. La prima è sempre convergente, perchè si suppone $b<a$; la seconda lo sarà pure se si ha $\text{tang}\,\frac{1}{2}b<\cot\frac{1}{2}a$, ovvero $a+b<200^\circ$. Ella sarebbe divergente, e falsa se si avesse $a+b>200^\circ$; ma questo caso può sempre evitarsi; perchè la risoluzione del triangolo BCA, Fig. 14. rispetto alla quale si avrebbe $CA+CB>200^\circ$, riducesi sempre a quella del triangolo A′CB′, in cui si ha $CA'+CB'<200^\circ$. Del resto la seconda serie è nella sua più gran convergenza quando a, e b son ambedue piccolissimi; allora il terzo lato c è pur piccolissimo, poichè si dee avere $c<a+b$, ed il triangolo sferico differisce pochissimo da un triangolo piano; in questo caso l'eccesso della somma dei tre angoli sopra due retti si esprime così

$$A+B+C-200^\circ=\tfrac{2}{1}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,C-\tfrac{2}{2}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,2C$$
$$+\tfrac{2}{3}\text{tang}^3\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,3C-\text{ec.}$$

CIII. Per trovare il terzo lato c del triangol proposto, si ha l'equazione $\cos c=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos C$, dalla quale è facile dedurne le due seguenti:

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}c=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b-2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}a\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}b\cos C+\cos^2\tfrac{1}{2}a\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}b,$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}c=\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}b\cos C+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}b.$$

Dalla forma di questi valori si vede chiaro che $\text{sen}\,\frac{1}{2}c$ può essere risguardato come il terzo lato d'un triangolo rettilineo, nel quale s'avrebbero i due lati cogniti $\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b$, e l'angolo contenuto C: similmente $\cos\frac{1}{2}c$ è il

terzo lato d'un triangolo rettilineo, i cui due lati sono $\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b$, seu $\frac{1}{2}a$ sen $\frac{1}{2}b$, e l'angolo contenuto $200^\circ - C$. Dunque si ha mercè della formula trovata per i triangoli rettilinei *

* cx.

$$\log \text{sen}\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b) - \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\text{tang}\frac{1}{2}a}\cos C - \frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\text{tang}^2\frac{1}{2}a}\cos 2C - \text{ec};$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b) + \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\cos C - \frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}a}\cos 2C + \text{ec}.$$

E' oltracciò da osservarsi che, come ciascuno dei triangoli rettilinei, di cui abbiamo parlato, può risolversi per mezzo d'un triangolo rettilineo rettangolo, si può ancora direttamente ridurre la risoluzione del triangolo sferico proposto a quella d'un triangolo rettilineo rettangolo.

Si trova con questo mezzo che sen $\frac{1}{2}c$ è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, i cui lati sono sen $\frac{1}{2}(a+b)$ sen $\frac{1}{2}C$, e sen $\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$. Parimente $\cos\frac{1}{2}c$ sarebbe l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, i cui lati fossero $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$, e $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ sen $\frac{1}{2}C$.

Di più, se si chiama M l'angolo, che nel primo triangolo è opposto al lato sen $\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$, e nel secondo, N l'angolo opposto al lato $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$, ne resulta dalle *analogie* di Nepero che s' avrà $\frac{A-B}{2} = M$, ed $\frac{A+B}{2} = N$, ovvero $= 200^\circ - N$; cioè, $\frac{A+B}{2} = N$, se $a+b < 200^\circ$, ed $\frac{A+B}{2} = 200^\circ - N$, se $a+b > 200^\circ$. Dunque in qualsisia triangolo sferico, ove si conoscon due lati a, e b, e l'angolo contenuto C, si può trovare direttamente ciascuna delle quantità $\frac{1}{2}c$, $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$ mediante la risoluzione d'un triangolo rettili-

neo rettangolo, ove si conoscono i due lati, che contengono l'angolo retto.

Resulta ancora da ciò, che dopo d'aver trovato l'angolo M, o $\frac{A-B}{2}$ per la formula tang M$=$ $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C$, si può calcolare il terzo lato per la formula

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\text{sen}\,M}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C}{\cos M}.$$

N. B. Le formule trovate in questo paragrafo si applicheran facilmente alla risoluzione del V. caso dei triangoli sferici, poichè questo può riportarsi al III. in virtù della proprietà del triangolo *polare*.

§. IV. *Risoluzione d'un triangolo sferico, di cui due lati differiscon poco da* 100°.

CIV. Sieno a, e b i due lati dati poco differenti da 100°, si propone di determinare l'angolo C per mezzo dei tre lati a, b, c.

Se i lati a, e b fossero esattamente eguali a 100°, si avrebbe $C=c$; dunque, se a, e b differiscon pochissimo da 100°, l'angolo C avrà per misura un arco pochissimo differente da c. Sia $a=100-\alpha$, $b=100+\beta$, $C=c+x$; se si sostituiscano questi valori nell'equazione $\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}$, s'avrà $\cos(c+x)=\frac{\cos c-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$. Ma, poichè α, e β son supposti piccolissimi, si può, trascurando solamente i termini ove le potenze α, e β passano il quarto grado, far

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta=\alpha\beta,\ \cos\alpha\cos\beta=1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2};$$ ciò che

darà $\cos(c+x) = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2} = (1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2)$ $\cos c - \alpha\beta$. Ora, trascurando il quadrato di x, si ha $\cos(c+x) = \cos c - x \operatorname{sen} c$; dunque

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos C}{\operatorname{sen} c}.$$

E poichè x è del second' ordine per rapporto ad α, e β, si vede che non vi è di trascurato in questo valore se non che le quantità del quart' ordine. Sia $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = p$, $\frac{1}{2}\alpha - \beta) = q$, ovvero $\alpha = p+q$, $\beta = p-q$, si avrà sotto una forma più semplice $x = p^2\left(\frac{1-\cos c}{\operatorname{sen} c}\right) - q^2\left(\frac{1+\cos c}{\operatorname{sen} c}\right)$ $= p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}c - q^2 \cot \frac{1}{2}c$. Questo valore è espresso in parti del raggio; ma, siccome in pratica p, e q son dati in secondi, se si vuole che x ancora sia espresso in secondi, bisognerà fare

$$x = \frac{p^2}{R} \operatorname{tang} \frac{1}{2}c - \frac{q^2}{R} \cot \frac{1}{2}c,$$

R essendo il numero dei secondi contenuti nel raggio; numero, il cui logaritmo $= 5,8038801$. Conoscendo x, s'avrà l'angolo cercato $C = c + x$.

La formula, che abbiam trovata, è utile nell' operazioni geodesiche per ridurre all'orizzonte gli angoli osservati in dei piani inclinati; ella è più speditiva, e dimanda delle Tavole meno estese che la formula del caso 1.^{mo} dei triangoli sferici, di cui abbiamo dato un esempio (n.° 93). Frattanto, se l'elevazioni, o depressioni α, e β fossero superiori a due, o tre gradi, sarebbe più sicuro servirsi del metodo generale.

§. V. *Risoluzione dei triangoli sferici, i di cui lati son piccolissimi per rapporto al raggio della sfera.*

cv. Allorchè i lati a, b, c son piccolissimi per rapporto al raggio della sfera, il triangolo proposto è poco differente da un triangolo rettilineo, e considerandolo come tale, si può averne una prima soluzione approssimativa; ma si trascura in questa maniera l'eccesso della somma degli angoli sopra 200°. Per avere una soluzione più approssimativa, bisogna tener conto di tal eccesso e questo è ciò, che si può far facilmente col mezzo d'un principio generale, che noi andiam quì a dimostrare.

Sia r il raggio della sfera, sulla quale è situato il proposto triangolo; se s'immagina un triangolo simile disegnato sulla sfera, il cui raggio è 1, i lati di questo triangolo saranno $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, e si avrà $\cos A = \dfrac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}}$. Ma, poichè r è grandissimo per rapporto ad a, b, c, si avrà in una maniera approssimatissima * $\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4r^4}$, $\operatorname{sen}\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3.r^3}$, $\operatorname{sen}\frac{c}{r} = c - \frac{c^3}{2.3.r^3}$. Sostituendo questi valori nell'equa-

* xxxv.

zion precedente, e trascurando i termini maggiori di quattro dimensioni in a, b, c, si avrà

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}+\frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4}-\frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2}{6r^2}-\frac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Moltiplicando i due termini di questa frazione per $1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$, e poi riducendo, si avrà

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}.$$

Sia adesso A′ l'angolo opposto al lato a nel triangolo rettilineo, i cui lati fossero eguali in lunghezza agli archi a, b, c; s'avrà $\cos A'=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$, e $4b^2c^2\operatorname{sen}^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$. Dunque

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen}^2 A'.$$

Sia $A = A'+x$, si avrà, rigettando il quadrato di x, $\cos A = \cos A' - x\operatorname{sen} A'$, d'onde si fa manifesto che $x=\frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen} A'$; e, poichè x è del secondo d'ordine per rapporto a $\frac{b}{r}$, e $\frac{c}{r}$, ne viene che questo resultato è prossimamente esatto fino alle quantità del quart' ordine. Si avrà dunque

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen} A'.$$

Ma $\frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A'$ è l'area del triangolo rettilineo, di cui a, b, c sono i tre lati, la quale non differisce sensibilmente da quella del proposto triangolo sferico. Dunque, se l'una, o l'altr' area è chia-

mata α, avremo $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ovvero $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$.
Parimente si avrebbe $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$;
e da ciò resulta $A' + B' + C'$, ovvero $200° = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$. Si può dunque considerare $\frac{\alpha}{r^2}$ come se fosse l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sferico proposto sopra due retti. Ciò posto, verrà a conseguirsi questo Teorema notabile, che riduce la risoluzione dei triangoli sferici piccolissimi a quella dei triangoli rettilinei.

Essendo proposto un triangolo sferico, i di cui lati son piccolissimi per rapporto al raggio della sfera, se da ciascuno dei suoi tre angoli si toglie il terzo dell'eccesso della somma dei tre angoli sopra due retti, gli angoli così diminuiti potranno esser presi per gli angoli d'un triangolo rettilineo, i cui lati sono eguali in lunghezza a quelli del triangolo sferico proposto; o in altri termini,

Il triangolo sferico pochissimo curvo, i di cui angoli sono A, B, C, *ed i lati opposti* a, b, c, *corrisponde sempre ad un triangolo rettilineo, che ha i lati della lunghezza medesima* a, b, c, *e i di cui angoli opposti sono* $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, *$\varepsilon$ essendo l'eccesso della somma degli angoli del triangolo sferico proposto sopra due angoli retti.*

CVI. L'eccesso ε, ovvero $\frac{\alpha}{r^2}$, ch'è proporzionale all'area del triangolo, può sempre calcolarsi *a priori* coi dati del triangolo sferico considerato come rettilineo. Se due lati b, c son dati con l'angolo contenuto A, si avrà l'area $\alpha = \frac{1}{2} bc$ sen A; se son dati un lato a, e i due angoli

adiacenti B, C, si avrà l'area $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen B sen C}}{\text{sen}(B+C)}$.

In seguito avrassi $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, essendo R il numero dei secondi compresi nel raggio, ed in questa maniera ε sarà espressa in secondi.

Per applicar queste formule ai triangoli segnati sulla superficie della Terra considerata come sferica(1), bisognerà supporre che i lati a, b, c, come pure il raggio r della Terra siano espressi in metri. Ora, poichè il quarto del meridiano $\frac{1}{2} \pi r$ è eguale a 10 000000 metri, se ne conclude $\log r =$ 6, 8038801; da un altro lato il raggio R espresso in secondi ha per logaritmo 5, 8038801. Dunque, se al logaritmo dell'area α espressa in metri quadrati si aggiunga il logaritmo costante 2, 196119, e si tolgano dieci unità dalla somma, si avrà il logaritmo dell'eccesso ε espresso in secondi.

Conoscendo ε si toglierà, o si supporrà tolto $\frac{1}{3}\varepsilon$ da ciascun angolo del triangolo sferico proposto, ed allora nel triangolo rettilineo formato dai lati a, b, c, cogli angoli $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$, si avranno i dati necessarj onde determinarne tutte le parti. Così si conosceranno

---

(1) Nell' operazioni geodesiche i triangoli sono, al più spesso, formati con tre stazioni disegualmente lontane dal centro della terra; ma, per mezzo di convenevoli riduzioni, si sostituiscono ai triangoli osservati i triangoli, che risultano dalla proiezione delle stazioni sopra una medesima superficie sferica perpendicolare alla direzion della gravità.

nel tempo medesimo quelle del proposto triangolo sferico.

CVII. *Esempio*. Sieno dati l' angolo C, ed i due lati a, e b, cioè,

$$C = 123° \; 10' \; 99''.23,$$
$$\log a = 4,5891503,$$
$$\log b = 4,5219271.$$

La quantità $\frac{1}{2} ab$ sen C, che rappresenta l' area del triangolo, avrà per logaritmo 8,78055, al quale aggiungendo 2,19612 si avrà $\log \varepsilon = 0,97667$; per ciò $\varepsilon = 9'', 48$, e $\frac{1}{2}\varepsilon = 3', 16$. Ciò posto, bisogna risolvere il triangolo rettilineo, nel quale si hanno i due lati a, e b come sopra, e l' angolo contenuto $C' = 123° \; 19' \; 96'', 07$. Per questo effetto noi seguiremo il metodo del n.° 56.

$a \ldots$ 4,5891503
$b \ldots$ 4,5219271

$\tan\varphi$. 0,0672232

$\varphi = 54° \; 90' \; 74''.72$
$\frac{1}{2}C' = 61 \; 59 \; 98,03$
$100° - \frac{1}{2}C' = 38 \; 40 \; 1,99$

$\tan(\varphi - 50°) \ldots$ 8,8878392
$\cot\frac{1}{2}C' \ldots$ 9,8381110

$\tan\frac{A'-B'}{2} \ldots$ 8.7259502

$$\frac{A'-B'}{2} = 3° \; 38' \; 39'',27$$
$$\frac{A'+B'}{2} = 38 \; 40 \; 1,97$$
$$A' = 41 \; 78 \; 41,24$$
$$B' = 35 \; 1 \; 62,70.$$

Resta a determinarsi il terzo lato c: questo si farà col mezzo dell' equazione $c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A'}$.

$a \ldots\ldots$ 4,5891503
sen A' ... 9,7854893

differenza. 4,8036610 4,8036610
sen C' ... 9,9705008 sen B' ... 9,7132961

$\log c = \ldots$ 4,7741618 $\quad \log b = 4,5219271$

Dunque nel triangolo sferico proposto gli elementi, che bisogna trovare, sono

$$A = 41^\circ\ 78'\ 44'',40$$
$$B = 35\ \ \ 1\ \ 65\ ,86$$
$$\log c = 4\ ,7741618,0\quad c = 59451^m\,256.$$

N. B. Il metodo dato in questo paragrafo può servire ancora a risolvere i triangoli, nei quali due lati fosser pochissimo differenti da 200°, ed il terzo piccolissimo. Perchè, prolungando i lati grandi A′C, A′B, s' avrà un triangolo sferico BCA, i cui tre lati sarebbero piccolissimi. (Fig. 16.)

§. VI. *Dei Triangoli sferici, di cui due angoli son acutissimi.*

(Fig. 17.) CVIII. Sia ABC il triangolo sferico proposto, nel quale A, e B son due angoli acutissimi; sia LMN il suo triangolo polare, in modo che si abbia MN = 200° — A, e LN = 200° — B. Se si prolunghino gli archi NM, NL fino all'incontro loro in K, è chiaro che si avrà KM = A, e KL = B: il triangolo LKM avrà dunque i suoi lati piccolissimi, e sarà nel caso d' essere risoluto col metodo del paragrafo precedente. Sieno A′, B′, C′ i tre angoli, e a', b', c' i tre lati del triangolo LKM, avremo

$$A' = MLK = a \qquad a' = KM = A$$
$$B' = LMK = b \qquad b' = LK = B$$
$$C' = LKM = 200^\circ - c \qquad c' = LM = 200^\circ - C.$$

Dunque tre elementi cogniti nel triangolo ABC ne daranno tre nel triangolo LKM, e per conseguenza tre ancora nel triangolo rettilineo, al quale il triangolo LKM può essere riportato: ora, quest'ultimo essendo risoluto, otterremo la so-

luzione del triangolo LKM, e da questa quella del proposto triangolo ABC.

CIX. Sian, per esempio, $A = 3.°$, $B = 2.°$, ed il lato adiacente $c = 150°$, i dati del triangolo LKM, o piuttosto A′ B′ C′; saranno $a' = 3°$, $b' = 2°$, e l'angolo contenuto $C' = 50°$. Per mezzo di questi dati si trova l'eccesso sferico $\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} a' b' \text{sen}\, C'}{R} = 333'',21$, ed il terzo di ε essendo tolto da C′, il resto sarà 49°, 98′ 88″, 93. Bisogna dunque risolvere un triangolo rettilineo, nel quale si hanno i due lati $a' = 30000''$, $b' = 20000''$, e l'angolo compreso $C' = 49° \; 98' \; 88'', 93$. Si troveranno i due altri angoli $A'' = 103° \; 64' \; 86'', 33$, $B'' = 46° \; 36' \; 24'' \; 75$, e il terzo lato $c' = 21244'', 36$; aggiungendo dunque $\frac{1}{3}\varepsilon$ agli angoli A″, e B″ del triangolo rettilineo, affine d'avere gli angoli A′, B′ del triangolo sferico, si avrà per la soluzione cercata

$$A' = a = 103° \; 65' \; 97'', 40,$$
$$B' = b = \;\; 46 \;\; 37 \;\; 35 \; , \; 82,$$
$$C = 200° - c' = 197 \;\; 87 \;\; 55 \; , \; 64.$$

§. VII. *Del poligono regolare di diciassette lati.*

CX. Termineremo queste applicazioni del calcolo trigonometrico, dando dietro all'eccellente Opera di Gauss, citata nella *Nota* alla pagina 134. della *Geometria*, la maniera d'iscrivere il poligono regolare di diciassette lati per la semplice soluzione dell'equaziani di secondo grado.

Sia l'arco $\frac{200°}{17} = \varphi$, dico che si avrà l'equazione $\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = \frac{1}{2}$. Perchè, se si chiama il primo numero P, e si moltiplichino tutti i suoi termini per $2 \cos \varphi$, ed in se-

guito si cangi ciascun prodotto di due coseni in coseni d'archi semplici per mezzo della formula

$$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B),$$

si avrà

$2 P \cos\varphi = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 2\cos 6\varphi \ldots + 2\cos 14\varphi + \cos 15\varphi$. Ora, poichè $17\varphi = 200°$, si ha $\cos 2\varphi = \cos(200° - 15\varphi) = -\cos 15\varphi$, $\cos 4\varphi = \cos(200° - 13\varphi) = -\cos 13\varphi$, e così di seguito fino a $\cos 16\varphi = -\cos\varphi$. Dunque

$$2P\cos\varphi = 1 - 2\cos 15\varphi - 2\cos 13\varphi - 2\cos 11\varphi \ldots - 2\cos 3\varphi - \cos\varphi.$$

o sivvero $2P\cos\varphi = 1 + \cos\varphi - 2P$, o $2P(1+\cos\varphi) = 1 + \cos\varphi$.

Dunque $P = \frac{1}{2}$.

Ciò posto, divido la somma dei termini, che compongono P, in due parti, cioè,

$$x = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 11\varphi,$$
$$y = \cos\varphi + \cos 9\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi.$$

Avrò dunque $x + y = \frac{1}{2}$. Moltiplico in seguito i quattro termini di x per i quattro termini di y, e cangiando i prodotti di coseni in coseni d'archi semplici ottengo, fatte le riduzioni necessarie,

$$xy = 2(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \ldots + \cos 16\varphi),$$

ovvero $xy = -2(\cos 15\varphi + \cos 13\varphi + \cos 11\varphi \ldots + \cos\varphi)$,

o finalmente $xy = -1$.

Per mezzo di queste equazioni si trovano

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{17}, \quad y = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Adesso, se si dividon di nuovo le somme x, ed y ciascuna in due parti, cioè,

$x = s + t$, $\quad y = u + z$,
$s = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi$, $\quad u = \cos\varphi + \cos 13\varphi$,
$t = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi$, $\quad z = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi$,

si troverà parimente

$$st = -\tfrac{1}{4} \quad , \quad uz = -\tfrac{1}{4}:$$

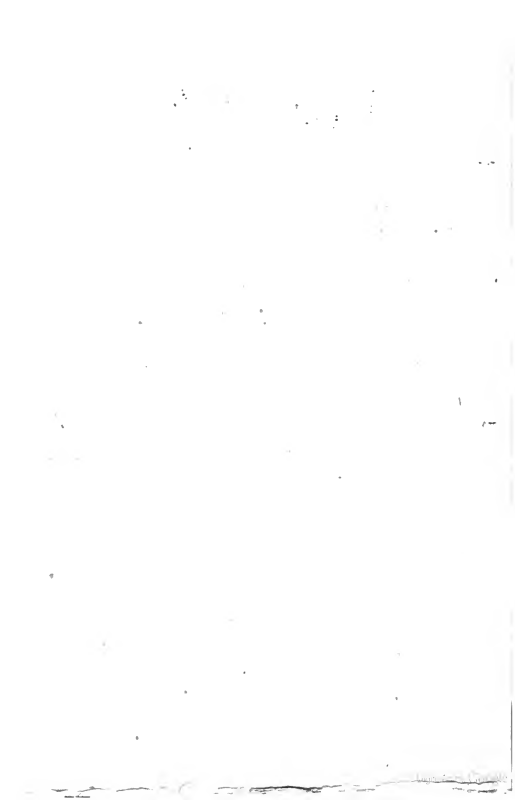
di modo che si potranno determinare i quattro numeri s, t, u, z per mezzo di due nuove equazioni di secondo *grado*.

Finalmente conoscendo $\cos\varphi + \cos 13\varphi = u$, e $\cos\varphi \cos 13\varphi = \frac{1}{2}(\cos 12\varphi + \cos 14\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) = -\frac{1}{2}s$, si otterrà, per una quarta equazione di secondo *grado*, il valore di $\cos\varphi$, e da questo quello del lato del poligono opposto, il quale è $2 \operatorname{sen}\varphi$, ovvero $2\sqrt{(1-\cos^2\varphi)}$.

Quanto al metodo, che ha diretto la divisione di queste diverse equazioni, egli appartiene ad una teoria delicatissima fondata sopra l' analisi *indeterminata*, di cui bisogna vederne lo sviluppo nell'Opera stessa di Gauss. Vi si troverà la dimostrazione completa del seguente Teorema bellissimo, e ad un tempo generalissimo.

Se il numero n sia *primo*, e $n-1$ resulti dal prodotto dei fattori *primi* $2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$, ec., la divisione della circonferenza del circolo in n parti eguali potrà sempre ridursi alla risoluzione di un numero α d'equazioni del 2.° *grado*, β del 3.°, γ del 5.°, e così di seguito in infinito.

FINE DELLA TRIGONOMETRIA.

Jinno P. a

MEMORIA

CONCERNENTE

LA SOLUZIONE D'ALCUNI PROBLEMI

RELATIVI

AI TRIANGOLI SFERICI

DEL SIGNOR

LUIGI LAGRANGE

TRADOTTA DAL FRANCESE

Ed estratta dal Tomo I. del Giornale della Scuola Politecnica pubblicato in Parigi l'anno VII.

SOLUZIONI

DI

ALCUNI PROBLEMI

concernenti i Triangoli sferici mediante un' analisi completa di questi Triangoli.

Si sa che ne' triangoli rettilinei i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, e si dimostra facilmente che questo rapporto costante de' lati a' seni è uguale al diametro del circolo circoscritto. Si può anco esprimere questo rapporto medesimo per mezzo dell' area del triangolo; ed è facil provare ch' egli è eguale al prodotto de' tre lati diviso per il doppio dell' area.

1. Ma se si volesse esprimere questo rapporto mediante i soli lati del triangolo, non si avrebbe che a considerare come chiamando a, b, c i tre lati, ed A, B, C gli angoli, che son loro opposti, si ha per il Teorema conosciuto $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; dunque $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, e quindi

$$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}}{2bc}.$$

Dunque, se si fa, per abbreviare,

$$d = \sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)]^2},$$

s'avrà sen $A=\frac{d}{2bc}$; dunque $\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{2abc}{d}$, ch'è il rapporto cercato.

Se si chiama r il raggio del circolo circoscritto al triangolo, e s la superficie, o area di questo medesimo triangolo, s'avrà

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{2abc}{d}=2r=\frac{abc}{2s};$$

dunque $r=\frac{abc}{d}$, e $s=\frac{abc}{4r}=\frac{d}{4}$.

2. Sviluppando il quadrato di $b^2+c^2-a^2$, e riducendo, si ha

$$d=\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)};$$

formula, in cui si vede che i tre lati a, b, c v'entrano egualmente, come ciò debb'essere.

Ma si può mettere questa formula sotto una forma più semplice, e più comoda per il calcolo logaritmico, decomponendola in fattori.

Infatti abbiamo $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=$ $(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$ $[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$; e decomponendo ancora ciascuno di questi fattori in due, s'avrà

$$d=\sqrt{[(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)]}.$$

Queste formule sono cognite; e io non le riporto quì se non che per servire come d'introduzione alle ricerche seguenti.

3. Poichè ne' triangoli sferici i seni de' lati sono proporzionali a' seni degli angoli opposti a questi lati, potremmo avere curiosità di conoscere questo rapporto costante, e di vedere ancor se dipenda, come ne' triangoli rettilinei, dal raggio del circolo circoscritto, o dall'area del triangolo.

Indichiamo sempre per a, b, c i tre lati del triangolo sferico, e per **A**, **B**, **C** i tre an-

goli opposti a questi lati; avremo, per il Teorema cognito,

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A ;$$

dunque $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, e quindi

$$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{[\operatorname{sen} b^2 \operatorname{sen} c^2 - (\cos a - \cos b \cos c)^2]}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Facciamo, per abbreviare,

$$f = \sqrt{[\operatorname{sen} b^2 \operatorname{sen} c^2 - (\cos a - \cos b \cos c)^2]}.$$

avremo $\operatorname{sen} A = \frac{f}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$; dunque

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{f};$$

espressione del rapporto cercato, analoga a quella che abbiam trovata pei triangoli rettilinei (n.° 1).

Siccome la quantità f vien espressa per un radicale quadrato, e può in conseguenza avere il segno *più* e *meno*, proveremo che relativamente ai triangoli sferici essa debb' essere sempre presa positivamente; perchè i lati, e gli angoli d'ogni triangolo essendo sempre minori di due retti, i loro seni son sempre necessariamente positivi.

4. La quantità radicale f è pur suscettibile di riduzioni analoghe a quelle del n.° 2.

Poichè, sostituendo per $\operatorname{sen} b^2$, e $\operatorname{sen} c^2$ i loro valori in coseni $1 - \cos b^2$, $1 - \cos c^2$, e riducendo, avremo

$$f = \sqrt{(1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c)},$$

ove si vede che i tre lati a, b, c entrano egualmente.

Si può parimente risolvere la quantità sotto il segno in fattori. Infatti s' avrà in primo luogo

$$\operatorname{sen} b^2 \operatorname{sen} c^2 - (\cos a - \cos b \cos c)^2$$
$$= (\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \cos c)$$
$$\times (\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cos c)$$
$$= [\cos a - \cos (b + c)] [\cos (b - c) - \cos a]:$$

ora, si ha in generale

$$\cos a - \cos h = 2 \operatorname{sen} \frac{a+h}{2} \times \operatorname{sen} \frac{h-a}{2};$$

dunque, decomponendo così i due fattori, avremo

$$f = 2\sqrt{\left(\operatorname{sen} \frac{a+b+c}{2} \times \operatorname{sen} \frac{a-b+c}{2} \times \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2}\right.}$$

$$\left.\times \operatorname{sen} \frac{-a+b+c}{2}\right);$$ espressione molto comoda per il calcolo logaritmico.

5. Cerchiamo frattanto il raggio del circolo circoscritto al triangolo sferico. E' evidente che questo circolo non può essere che un dei piccoli circoli della sfera, e che sarà ancor circoscritto al triangolo rettilineo formato delle tre corde degli archi a, b, c. Ora queste corde essendo espresse per $2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}$, $2 \operatorname{sen} \frac{b}{2}$, $2 \operatorname{sen} \frac{c}{2}$, non vi resterà che a sostituirle in luogo di a, b, c nell' espressione del raggio r (n.° 2.) e vale a dire in $\frac{abc}{d}$.

Chiamiamo R il raggio di questo circolo circoscritto, ed h ciò che diviene la quantità d per le sostituzioni, di cui si tratta; avremo

$$R = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \times \operatorname{sen} \frac{b}{2} \times \operatorname{sen} \frac{c}{2}}{h};$$

Ora, si ha

$$h^2 = 32\left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2}\right)^2 + 32\left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2}\right)^2$$

$$+ 32\left(\operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2}\right)^2 - 16\left(\operatorname{sen} \frac{a}{2}\right)^4 - 16\left(\operatorname{sen} \frac{b}{2}\right)^4$$

$-16\left(\text{sen}\,\frac{c}{2}\right)^4$; e sostituendo per $2\left(\text{sen}\,\frac{a}{2}\right)^2$, $2\left(\text{sen}\,\frac{b}{2}\right)^2$, $2\left(\text{sen}\,\frac{c}{2}\right)^2$ i loro valori $1-\cos a$, $1-\cos b$, $1-\cos c$, avremo dopo le riduzioni

$$h^2 = 12 - 8\cos a - 8\cos b - 8\cos c$$
$$+ 8\cos a\cos b + 8\cos a\cos c + 8\cos b\cos c$$
$$- 4\cos a^2 - 4\cos b^2 - 4\cos c^2;$$

espressione, che si può ridurre alla seguente

$$4f^2 + 8(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c),$$

e vale a dire

$$4f^2 + 64\left(\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2}\right)^2,$$

sostituendo il valore di f del n.° 4. Così avremo

$$R = \sqrt{\frac{4\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2}}{\left[f^2 + 16\,(\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2})^2\right]}}$$

6. Adesso, se si considera il raggio della sfera, che passa per il centro del piccol circolo circoscritto, è visibile che questo raggio sarà perpendicolare al piano di detto circolo, e terminerà al punto della superficie sferica, che sarà il polo del medesimo circolo. Dunque, chiamando φ l'arco, che misura la distanza dal polo alla circonferenza del suddetto circola, s'avrà evidentemente $R = \text{sen}\,\varphi$; dunque

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{4\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2}}{\sqrt{\left[f^2 + (4\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2})^2\right]}};$$

dal che si deduce

$$\cos\varphi = \frac{f}{\sqrt{\left[f^2 + \left(4 \operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)^2\right]}},$$

e quindi

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{f}.$$

Dunque, poichè $\operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, e così è degli altri seni, avremo (n.° 3.)

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = 2\operatorname{tang}\varphi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

7. Se si volesse aver l' area del triangolo rèttilineo iscritto nel piccol circolo, di cui si parla, e formato dalle corde degli archi a, b, c, chiamando S questa superficie, non s' avrebbe che a cangiare nella formula $s = \frac{abc}{4r}$ del n.° 1. s in S, r in R, ed a, b, c in $2\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $2\operatorname{sen}\frac{b}{2}$, $2\operatorname{sen}\frac{c}{2}$; ciò, che darèbbe immediatamente

$$S = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{R},$$

oppure, a causa di $R = \operatorname{sen}\varphi$ (n.° 6.),

$$S = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Se adesso si considera la Piramide triangolare, che ha questo triangolo per base, e il cui vertice è al centro della sfera, è patente che l'altezza di questa piramide sarà cos φ; dunque la sua solidità sarà $\frac{S \cos \varphi}{3}$, o sivvero, sostituendo per S il valore, che abbiamo trovato, cioè

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2}}{3 \operatorname{tang} \varphi},$$

e sostituendo di più il valore di tang φ, trovato di sopra (n.° 6.), avremo $\frac{f}{6}$ per il valore della solidità di quella piramide.

8. Resta da considerarsi ancor l'area del triangolo sferico formato dagli archi a, b, c.

Si conosce il bel Teorema, secondo il quale l'area del triangolo sferico sta alla superficie intera della sfera come l'eccesso de' tre angoli del triangolo sopra due retti stà a 8 angoli retti. Si attribuisce quel Teorema comunemente ad *Alberto Girard*, che l'enuncia infatti nell'Opera intitolata *Invenzione nuova in Algebra*, ed impressa in *Amsterdam* nel 1629; ma siccome la dimostrazione, ch'egli ne dà, non è niente rigorosa, e non può essere riguardata che come un'induzione, si dee piuttosto attribuire questo Teorema al *Cavalieri*, che l'ha dato nel *Directoricum generale uranometricum*, impresso in Bologna nel 1632, colla bella dimostrazione riportata da Wallis, e inserita dipoi nella maggior parte delle *Trigonometrie*.

Chiamiamo Σ l'eccesso de' tre angoli del triangolo sopra due retti; avremo, ritenendo le

denominazioni fin quì impiegate, o chiamando D l'angolo retto,

$$\Sigma = A + B + C - 2D.$$

Così l'area del triangolo, i cui lati sono a, b, c, e gli angoli opposti A, B, C, sarà la parte $\frac{\Sigma}{8d}$ della superficie intiera della sfera; e se si riguarda questa superficie com' eguale a 8 D, si potrà allora prendere Σ per il valore dell'area medesima del triangolo.

9. Se s'immagina che i lati b, e c, i quali comprendono l'angolo A, sian prolungati fino al quarto di circolo, gli angoli B, e C diverranno retti, ed il lato a diverrà eguale all'angolo opposto A: allora l'area del triangolo rettangolo isoscele diverrà A; dunque, se si toglie il primo triangolo, di cui i lati intorno all'angolo A sono b, e c, avremo il quadrilatero sferico, di cui la base sarà A, ed i lati perpendicolari a questa base saranno $D - b$, e $D - c$; e l'area di questo quadrilatero sarà espressa semplicemente da $B + C - 2D$.

Ma per le analogie conosciute di *Neper* si ha in ogni triangolo sferico quest'equazione, che dimostreremo più sotto,

$$\operatorname{tang} \frac{B+C}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \cot \frac{A}{2}.$$

Dunque, se s'indica per σ l'area, o superficie del quadrilatero, di cui si tratta, avremo $\operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \cot \frac{B+C}{2} = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}}$; dunque

$$\tang \frac{\sigma}{2} = \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{b-c}{2}} \tang \frac{A}{2}.$$

E se s'indicano per β, e γ i due lati del quadrilatero perpendicolari alla base A, di modo che $\beta = D - b$, e $\gamma = D - c$, avremo per la determinazione dell'area σ, la formula

$$\tang \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \tang \frac{A}{2}.$$

Questa formula corrisponde alla formula cognita $\sigma = \frac{\beta+\gamma}{2} A$ pei quadrilateri rettilinei, di cui A sia la base, β, e γ i due lati verticali, e σ l'area; e siccome questa è del maggior uso per misurare le superficie piane terminate da linee rette, la formula, che abbiamo data, sarà egualmente utile per misurare le superficie sferiche terminate da degli archi di gran circoli. Così essa può essere impiegata con molto vantaggio per determinare l'estension d'un paese allorchè si conoscono le *latitudini*, e le differenze di *longitudine* di più punti situati sulla circonferenza; imperocchè unendo questi punti con degli archi di gran circoli, avremo un poligono sferico, di cui si troverà facilmente l'area decomponendolo in quadrilateri formati dai circoli di *latitudine*, e dagli archi dell'equatore interposti fra questi circoli.

10. Ma se si volesse avere il valore dell'area Σ per mezzo dei tre lati a, b, c del triangolo sfe-

rico, non si avrebbe che a considerare, che poichè $\Sigma = A + B + C - 2D$, si avrà

$$\cot\frac{\Sigma}{2} = -\tang\frac{A+B+C}{2}$$

$$= -\frac{\tang\frac{A}{2} + \tang\frac{B+C}{2}}{1 - \tang\frac{A}{2}\tang\frac{B+C}{2}}.$$

Se si sostituisca in luogo di $\tang\frac{B+C}{2}$ il suo valore trovato quì sopra (n.° precedente) si avrà

$$\cot\frac{\Sigma}{2} = -\frac{\tang\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} + \cot\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2} - \cos\frac{b-c}{2}};$$

formula, che si trasforma facilmente in quest' altra

$$\cot\frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sen\frac{b}{2}\sen\frac{c}{2}\cos A}{\sen\frac{b}{2}\sen\frac{c}{2}\sen A}.$$

Se adesso si sostituiscano in questa formula i valori di sen A, e cos A del n.° 3., avremo, dividendo sopra e sotto per $\sen\frac{b}{2}\sen\frac{c}{2}$,

$$\cot\frac{\Sigma}{2} = \frac{4\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\right)^2 + \cos a - \cos b\cos c}{f}.$$

Ma $2\left(\cos\frac{b}{2}\right)^2 = 1 + \cos b$, e $2\left(\cos\frac{c}{2}\right)^2 = 1 + \cos c$;

dunque facendo queste sostituzioni, e rovesciando la frazione s'avrà

$$\tan \frac{\Sigma}{2} = \frac{f}{1+\cos a+\cos b+\cos c};$$

formula la più semplice per determinare l'area Σ d'un triangolo sferico col mezzo de' suoi tre lati a, b, c.

11. Abbiamo veduto (n.° 7.) che $\frac{f}{6}$ è la solidità della piramide triangolare formata dai tre raggi della sfera, che corrispondono ai tre angoli del triangolo sferico.

Consideriamo adesso una piramide triangolare formata da questi medesimi raggi prolungati tanto quanto si vorrà, di modo che essi divengano p, q, r, e che a, b, c sieno gli archi, o gli angoli compresi fra queste rette. Per aver la solidità di questa piramide non avrem che da considerarla come giacente sopr' una delle sue facce, per esempio quella, che ha per lati le linee p, e q, ed abbassare dall'estremità della terza retta r una perpendicolare P sopra il piano della medesima faccia. E' primieramente facile di vedere che, se a è l'angolo compreso fra p, e q, l'area della faccia, che noi risguardiamo come la base della piramide, sarà $\frac{pq \operatorname{sen} a}{2}$;

dunque la solidità della piramide sarà $\frac{Ppq \operatorname{sen} a}{6}$.

Ora, se si nomina θ l'angolo, che la retta r fa col piano, che passa per le rette p, e q, è manifesto che s'avrà $P = r \operatorname{sen} \theta$; dunque la solidità cercata sarà $\frac{pqr \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \theta}{6}$.

L'angolo θ non è altra cosa che l'arco ab-

bassato perpendicolarmente dal vertice dell'angolo A del triangolo sferico sopra il lato opposto a; si può per conseguenza determinare il valore di sen θ per mezzo dei seni, o coseni de' lati a, b, c del triangolo: ma, pel nostro oggetto, basta considerare che questo valore, egualmente che quello di sen a, essendo indipendente dalle linee p, q, r, se si fa $p=1$, $q=1$, $r=1$, avremo il caso della piramide, di cui abbiamo parlato quì sopra, e di cui la solidità è $\frac{f}{6}$.

Da ciò ne segue che si avrà sen a sen $\theta=f$; laonde avremo in generale $\frac{pqrf}{6}$ per la solidità della piramide triangolare, nella quale i tre lati, o spigoli, che formano uno qualunque degli angoli solidi, sono p, q, r, e gli angoli compresi fra questi tre lati sono a, b, c.

Quest'espressione della solidità di qualunque piramide triangolare per mezzo de' tre lati, e degli angoli contenuti è, come vedesi, semplicissima, e comodissima per il calcolo, soprattutto se s'impiega per il valore di f l'espressione in fattori notati nel n.° 4., ed essa può essere vantaggiosissima per determinar la solidità di tutti i corpi terminati da piani, poichè si può sempre risolverli in piramidi triangolari, come risolvonsi in triangoli tutti i poligoni.

12. Del resto, poichè abbiam trovato sen a sen $\theta=f$, avremo sen $\theta=\frac{f}{\text{sen } a}$; di maniera che si può determinare per mezzo di questa formula la perpendicolare θ in ogni triangolo sferico, di cui a sia la base, e b, c i suoi due lati.

13. Io non ho risoluti i problemi precedenti se non che per avere occasione di mostrar l'origine, e l'uso d'alcune formule ragguardevoli,

e soprattutto della funzione indicata per f, che merita specialmente l'attenzione degli Analisti a motivo delle diverse sue applicazioni. Passo adesso a delle considerazioni generali sulla Trigonometria sferica analiticamente considerata.

Le risoluzioni analitiche de' triangoli sferici non sono state da principio che semplici applicazioni dell'Algebra alle costruzioni geometriche. Ci siam contentati in seguito di stabilire per mezzo della Geometria alcune Proposizioni fondamentali, e si son ricavate tutte le formule della Trigonometria sferica dall'equazioni ottenute per mezzo di queste Proposizioni. Ciò che abbiamo di più elegante in questo genere è la *Memoria d'Euler*, intitolata *Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis derivata*, ed impressa negli Atti dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1779. Ivi si trova un sistema completo di formule trigonometriche, fondate unicamente su tre equazioni. Ma non si potrebb' egli semplicizzare ancor questo sistema, riducendolo ad una sola equazione fondamentale?

Questa riduzione condurrebbe a perfezionare la teoria analitica de' triangoli sferici; poichè nell'Analisi la perfezione consiste nel non impiegare che il minor numero possibile di principj, ed in far derivare da questi principj tutte le verità, ch'essi posson racchiudere per mezzo della sola virtù dell'Analisi: nel metodo sintetico delle linee essa consiste al contrario nel dimostrare rigorosamente ciascuna proposizione nella maniera la più semplice per mezzo delle proposizioni già dimostrate.

Il defunto *De Gua* avea di già avuta l'idea di far dipendere tutta la Trigonometria sferica da una sola proprietà generale de' triangoli sferici; ma la *Memoria*, ch'egli ha data su questo soggetto nel Volume dell'Accademia delle Scien-

re del 1783, contiene de' calcoli così complicati ch'essi sembran più proprj a palesare gl'inconvenienti del di lui metodo che a farlo adottare.

Io quì mi propongo il medesimo oggetto, e vado a presentare un quadro succinto di tutte le formule della Trigonometria sferica, deducendole per via di semplice trasformazione da una sola equazione somministrata dalla natura de' triangoli sferici.

14. Noi partiremo, come l' ha fatto *De Gua*, dall' equazione (n.° 3.)

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

in cui a, b, c sono i tre lati, o archi del triangolo, ed A l'angolo opposto al lato a.

Quest'equazione dimostrasi facilmente mediante la sola considerazione de' due triangoli rettilinei formati, l'uno dalle due tangenti degli archi b, e c, e dalla retta, che congiunge l'estremità di queste due tangenti, l'altro da questa medesima retta, e dalle due secanti dei medesimi archi; poichè è evidente che le due tangenti forman fra loro l'angolo A contenuto dagli archi b, e c, e le due secanti forman fra loro l'angolo a, ch'è il lato del triangolo sferico opposto all'angolo A. Così chiamando h il lato comune a questi due triangoli, s'avrà subito per il Teorema cognito, che risguarda i triangoli rettilinei, l'equazione

$$h^2 = \operatorname{tang} b^2 + \operatorname{tang} c^2 = 2 \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos A$$

per il primo triangolo, e l'equazione

$$h^2 = \sec b^2 + \sec c^2 - 2 \sec b \sec c \cos a$$

per il secondo triangolo.

Da ciò si ricava

$$\operatorname{tang} b^2 + \operatorname{tang} c^2 - 2 \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos A$$
$$= \sec b^2 + \sec c^2 - 2 \sec b \sec c \cos a.$$

Ora si ha evidentemente

$$\sec b^2 - \operatorname{tang} b^2 = 1,$$

e parimente

$$\sec c^2 - \operatorname{tang} c^2 = 1;$$

dunque l'equazione diventerà

$$\sec b \sec c \cos a = 1 + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos A.$$

Sostituendo per $\sec b$, $\sec c$, $\operatorname{tang} b$, $\operatorname{tang} c$, i loro valori $\frac{1}{\cos b}$, $\frac{1}{\cos c}$, $\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$, $\frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}$, e moltiplicando per $\cos b \cos c$, avremo l'equazione fondamentale

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \ldots (A).$$

Siccome, per l'ipotesi, non v'è tra le quattro quantità a, b, c, A altra condizione se non che quella che a, b, c, siano i tre lati del triangolo, ed A l'angolo opposto al lato A, ne segue che, chiamando B, e C gli angoli opposti ai lati b, e c, avremo equazioni simili relativamente a questi angoli, col cangiar solamente A in B, o in C, purchè si cangi nel medesimo tempo a in b, o in c.

15. Adesso, se si prenda dall'equazion precedente il valore di cos A, e si formi quello di sen A, s'avrà, come abbiamo di già trovato nel n.° 3.,

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{f},$$

ove la quantità f è una funzione di a, b, c, nella quale queste tre quantità entrano egualmente; di maniera che essa riman la medesima facendo fra loro qualunque permutazione che si volesse.

Così, cangiando a in b, ed A in B, il secondo membro dell'equazione non cangia, e si avrà per conseguenza l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \ldots (B).$$

Questo è ciò, che si chiama l'analogia comune de' seni, ed è visibile che, cangiando a in c, ed A in C, avrem parimente $\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen A}} = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen C}}$.

16. Riprendiamo l'equazione (A) del n.° 14., cioè, $\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A$; cangiando a in c, ed A in C, avrem parimente $\cos c = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos C$; sostituendo questo valore di $\cos c$ nella prima equazione, essa diventerà $\cos a = \cos a \cos b^2 + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos b \cos C + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A$; cioè, $\cos a\, \text{sen}\, b^2 = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos b \cos C + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A$; e dividendo per $\text{sen}\, b$,

$$\cos a\, \text{sen}\, b = \text{sen}\, a \cos b \cos C + \text{sen}\, c \cos A.$$

Sostituendo per $\text{sen}\, c$ il suo valore $\frac{\text{sen}\, a\, \text{sen C}}{\text{sen}\, a}$ ricavato dall'equazione (B) del n.° precedente, e cangiando b in c, e B in C, dividiamo in seguito per $\text{sen}\, a$, e ponghiamo $\cot a$, e $\cot A$, in luogo di $\frac{\cos a}{\text{sen}\, a}$, e $\frac{\cos A}{\text{sen A}}$, s'avrà l'equazione

$$\cot a\, \text{sen}\, b = \cot A\, \text{sen C} + \cos b \cos C \ldots. \text{(C)}.$$

17. Finalmente la medesima equazione trovata quì sopra $\cos a\, \text{sen}\, b = \text{sen}\, a \cos b \cos C + \text{sen}\, c \cos A$, dà, cangiando a in b, ed A in B, $\text{sen}\, a \cos b = \cos a\, \text{sen}\, b \cos C + \text{sen}\, c \cos B$. Sostituendo questo valore di $\text{sen}\, a \cos b$ nella stessa equazione, si ha $\cos a\, \text{sen}\, b = \cos a\, \text{sen}\, b \cos C^2 + \text{sen}\, c \cos B \cos C + \text{sen}\, c \cos A$, cioè, $\cos a\, \text{sen}\, b\, \text{sen C}^2 = \text{sen}\, c (\cos B \cos C + \cos A)$; sostituiamo per $\text{sen}\, c$ il suo valore $\frac{\text{sen}\, b\, \text{sen C}}{\text{sen B}}$, preso dall' equazione (B) cangiando a in c, ed A in C; dividiamo in seguito per $\text{sen}\, b\, \text{sen C}$, e moltiplichiamo per sen B; s'avrà $\cos a\, \text{sen B}\, \text{sen C} = \cos B \cos C + \cos A$, cioè,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen B}\, \text{sen C} \cos a \ldots. \text{(D)}.$$

18. Questa formula, come si vede, è analoga in tutto alla formula (A) del n.° 14., da cui siamo partiti; gli angoli A, B, C hanno preso il posto de' lati a, b, c, e reciprocamente; ed i coseni son divenuti negativi, i seni restando positivi: il che indica che i lati son divenuti i supplementi a due retti degli angoli, e gli angoli i supplementi a due retti de' lati. Così tutte le formule, che risultano dalla formula (A), saranno ancor vere facendovi questi medesimi cangiamenti.

Resulta da ciò questa proprietà conosciuta de' triangoli sferici, cioè, che ogni triangolo sferico può esser cangiato in un altro, di cui i lati, e gli angoli siano respettivamente supplementi degli angoli, e lati del primo, e si sa che questo nuovo triangolo, il quale si chiama *supplementario*, è quello, che vien formato sulla sfera dai tre poli degli archi, che costituiscono i lati del triangolo dato, congiungendo questi poli con degli archi di gran circolo; ciò, che dimostrasi facilmente per mezzo d' una costruzion semplicissima.

19. Le quattro equazioni (A), (B), (C), (D), che abbiamo trovate, racchiudono la soluzione di tutti i Problemi della Trigonometria sferica; imperocchè, siccome in un triangolo sferico non vi sono che sei elementi, cioè i tre lati, ed i tre angoli, e che tre di questi elementi bastano per determinare il triangolo, è chiaro che le relazioni le più semplici non posson essere che tra quattro elementi: ora, tutte le combinazioni differenti, che si possano fare di sei elementi presi quattro a quattro, si riducono alle quattro seguenti:

1.° Fra tre lati, ed un angolo: questa relazione è data dall' equazione (A);

2.° Fra due lati, e due angoli, che posson

esser opposti respettivamente ai due lati, o l'uno opposto, l'altro adiacente ad un medesimo lato; il che fa due casi. La relazione fra i due lati, e i due angoli opposti è data dall'equazione (B);

3.° Fra due lati, e due angoli, di cui l'uno opposto, e l'altro adiacente al medesimo lato dato; questa relazione è contenuta nell'equazione (C);

4.° Fra tre angoli, ed un lato: questa relazione è data dall'equazione (D).

20. Se si supponga l'angolo A retto, l'equazioni precedenti si semplicizzano, e danno le seguenti:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\cot a = \cot b \cos C$$

$$\cos a = \cot B \cot C;$$

e se si supponga l'angolo C retto, l'equazioni (C), e (D) danno pur queste due

$$\cot A = \cot a \operatorname{sen} b,$$

$$\cos A = \operatorname{sen} B \cos a.$$

Queste sei equazioni somministrano direttamente la soluzione di tutti i casi de' triangoli sferici rettangoli; e siccome esse sono sotto una forma comodissima per l'impiego de' logaritmi, ce ne serviamo comunemente nella Trigonometria decomponendo tutti i triangoli in triangoli rettangoli per mezzo dell' abbassamento d' una perpendicolare. Ma si possono egualmente risolvere tutti i casi per mezzo delle quattro equazioni generali riducendo queste equazioni in fattori mediante le trasformazioni, che andiamo ad esporre.

21. L'equazione (A) fra i tre lati a, b, c,

ed un angolo A opposto al lato a, può servire a determinare 1.° A per a, b, c; 2.° a per b, c, ed A; 3.° b per a, c, ed A.

1.° Affin di determinare A per a, b, c, s'avrà

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

dalla qual si deduce

$$1 + \cos A = 2\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c+a}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$1 - \cos A = 2\left(\operatorname{sen} \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a-b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

dunque

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b+c}{2}}{\operatorname{sen} \frac{b+c+a}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2}}\right)} \ldots (a).$$

2.° All'effetto di determinare a per b, c, ed A, si ha

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Non sembra quasi possibile di ridurre immediatamente questa equazione in fattori per l'uso de' logaritmi, ma vi si può giunger per mezzo d'un angolo sussidiario.

Infatti, se si fa

$$\operatorname{tang} c \cos A = \operatorname{tang} \varphi \ldots (b),$$

s' avrà $\text{sen}\, c \cos A = \cos c \,\text{tang}\, \varphi$; dunque $\cos a = \cos c\, (\cos b + \text{sen}\, b \,\text{tang}\, \varphi)$. Ora $\cos b + \text{sen}\, b\, \text{tang}\, \varphi = \frac{\cos b \cos \varphi + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos(b-\varphi)}{\cos \varphi}$; dunque

$$\cos a = \frac{\cos c \cos(b-\varphi)}{\cos \varphi} \dots\dots (c).$$

Non è difficil vedere che questa tsasformazione riducesi alla division del triangolo in due triangoli rettangoli per mezzo d'una perpendicolare abbassata dall' angolo B sul lato b, e che φ è il segmento del lato adiacente all' angolo A.

3.° All'oggetto di determinar b per a, c, ed A, bisognerebbe sostituire nell' equazion principale (A) $\sqrt{(1-\text{sen}\, b^2)}$ in luogo di $\cos b$, inalzare in seguito al quadrato, onde fare sparir il radicale, e trovar il valore di sen b per mezzo della risoluzione d'un' equazione di secondo grado; ciò, che darebbe per sen b una formula complicata, la qual non s'adatterebbe al calcolo logaritmico. Ma la trasformazione impiegata di sopra serve ancora a risolvere questo caso; poichè, avendo determinato l' angolo φ per mezzo dell' equazione (b), l'equazione (c) darà

$$\cos(b-\varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos c} \dots (d).$$

22. L' equazione (B) tra due lati a, e b, e gli angoli opposti A, e B può servire 1.° a determinar A per a, b, B; 2.° a determinar a per b, A, B.

1.° Per determinar A mediante a, b, B, s'avrà

$$\text{sen}\, A = \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, B}{\text{sen}\, b} \dots (e).$$

2.° Per determinare a col mezzo di b, A, B, s' avrà

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} \dots\dots (f).$$

Queste formule non han bisogno di nessuna trasformazione per l'applicazione dei logaritmi.

23. L'equazione (C) fra i due lati a, e b, ed i due angoli A, e C, il primo opposto, il secondo adiacente al lato a, può servire 1.° a determinare A per a, b, C; 2.° a determinar a per b, A, C; 3.° a determinare C per a, b, ed A; 4.° a determinar b per a, A, C.

1.° Affin di determinare A per a, b, c, s'avrà l'equazione

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} C} - \cot C \cos b;$$

e, per ridurla in fattori, si farà $\frac{\cot a}{\cos C} = \cot \varphi$, oppure

$$\operatorname{tang} a \cos C = \operatorname{tang} \varphi \ldots. (g):$$

dunque $\cot a = \cos C \cot \varphi$; e sostituendo questo valore si avrà $\cot A = \cot C (\cot \varphi \operatorname{sen} b - \cos b) = \frac{\cot C}{\operatorname{sen} \varphi} (\cos \varphi \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} \varphi \cos b) = \frac{\cot C \operatorname{sen}(b - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}$; dunque

$$\cot A = \frac{\cot C \operatorname{sen}(b - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi} \ldots. (h).$$

Questa riduzione consiste pure nel dividere il triangolo in due triangoli rettangoli per mezzo d'una perpendicolare abbassata dall'angolo B sul lato opposto b; e l'angolo sussidiario φ è il segmento di questo lato adiacente all'angolo C.

2.° Ad oggetto di determinare a per b, A, C, avrem l'equazione

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} b} + \cot b \cos C;$$

e, per ridurla a fattori, si farà

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \operatorname{tang} \varphi \ldots. (i);$$

dunque, sostituendo nell'equazione in vece di $\cot A$ il suo valore $\tang \varphi \cos b$, avremo $\cot a = \cot b$ $(\operatorname{sen} C \tang \varphi + \cos C) = \frac{\cot b}{\cos \varphi}(\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \varphi + \cos C \cos \varphi)$ $= \frac{\cot b \cos (C - \varphi)}{\cos \varphi}$; dunque

$$\cot a = \frac{\cot b \cos (C - \varphi)}{\cos \varphi} \ldots . (k).$$

Questa riduzione consiste pure nel dividere il triangolo in due triangoli rettangoli abbassando una perpendicolare dall' angolo C sul lato c; e l' angolo sussidiario φ è il segmento dell' angolo C adiacente al lato b.

3.° Affin di determinar C per a, b, A, bisognerebbe prendere dall' equazione (C) il valore di sen C, o di cos C mediante la risoluzione d' un' equazione di secondo grado, e s' avrebbe un espressione, che conterrebbe un radicale. Ma la trasformazion precedente è parimente utile per risolvere questo caso; poichè, avendo trovato l' angolo φ in virtù dell' equazione (i), l' equazione (h) darà

$$\cos (C - \varphi) = \frac{\cot a \cos \varphi}{\cot b} \ldots (l).$$

4.° Finalmente all' effetto di determinar b per a, A, C, bisognerebbe pur ricavare dalla medesima equazione (C) il valore di sen b, o cos b per mezzo della risoluzione d' una equazione di secondo grado. Ma la trasformazione impiegata per il primo caso servirà a risolvere ancora questo; poichè, avendo trovato l' angolo sussidiario φ mercè l' equazione (g), l' equazione (h) darà

$$\operatorname{sen} (b - \varphi) = \frac{\cot A \operatorname{sen} \varphi}{\cot C} \ldots . (m).$$

24. In ultimo l'equazione (D) fra i tre angoli A, B, C, ed un lato a servirà a determinare 1.° a per A, B, C; 2.° A per a, B, C; 3.° B per a, A, C. Siccome questi tre casi corrispondono a quelli, che dipendono dall'equazione (A), di cui l'equazione (D) non è che una trasformata, si può immediatamente applicarvi le formule, che abbiamo date per gli altri nel n.° 21, sostituendo in luogo de' lati a, b, c i supplementi a due retti degli angoli A, B, C, ed in vece di questi angoli i supplementi a due retti de' lati opposti a, b, c (n.° 18).

Così 1.° Affin di determinare a per A, B, C, l'equazione (a) del n.° 21. darà la trasformata

$$\cot\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cdot\cos\frac{A-B+C}{2}}{-\cos\frac{B+C+A}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}\right)}\cdot(n).$$

2.° All'effetto di determinar A per a, B, C, si faranno le medesime sostituzioni nelle formule (b), e (c) del medesimo n.°, e prendendo in vece dell'angolo φ il suo complemento ad un retto, avremo queste due equazioni

$$\tang C\cos a=\cot\varphi\ \ldots\ (o),$$

$$\cos A=\frac{\cos C\,\text{sen}\,(B-\varphi)}{\text{sen}\,\varphi}\ \ldots\ (p).$$

3.° Le medesime equazioni serviranno a determinare B per a, A, C; imperocchè, avendo trovato φ per l'equazione (o), l'equazione (p) somministrerà

$$\text{sen}(B-\varphi)=\frac{\cos A\,\text{sen}\,\varphi}{\cos C}\ \ldots\ (q).$$

25. Si può dunque per mezzo di queste formule trovare direttamente un lato, o un angolo

qualunque mediante tre parti date, sien queste o lati, od angoli: ciò abbraccia tutta la teoria dei triangoli sferici. Ma allorchè si deggian cercare insieme due lati per mezzo del terzo, e de'due angoli opposti, o due angoli per mezzo del terz'angolo, e de'due lati opposti, è più comodo impiegare le formule trovate da *Neper* tra queste cinque parti, o elementi. Ecco la maniera più semplice di giungere a queste formule.

Abbiam trovato nel n.° 21.

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b+c+a}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}\right)}.$$

Avrem parimente mercè dell' angolo B, cangiando A in B, ed a in b,

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}}\right)};$$

moltiplicando dunque insieme

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}.$$

Se in quest' equazione si cangia b in c, e B in C, avremo

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}};$$

e cangiando nella medesima equazione a in c, e A in C, s' avrà

$$\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}:$$

dunque, sommando, avremo

$$\left(\tang\frac{A}{2}+\tang\frac{B}{2}\right)\tang\frac{C}{2}=$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}+\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}};$$

e sottraendo le medesime equazioni una dall'altra, s'avrà

$$\left(\tang\frac{A}{2}-\tang\frac{B}{2}\right)\tang\frac{C}{2}=$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}-\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}.$$

Da un altro canto si ha

$$1+\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}+\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}},$$

$$1-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}-\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}.$$

Dunque, poichè $\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}\pm\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{1\mp\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}$

avremo queste due equazioni

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\ldots\ldots(r),$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\ldots\ldots(s).$$

Si posson dedurre formule simili dall'equazione (n) del n.° 24; e senza fare un calcolo nuovo, non si dovrà che cambiare i lati a, b, c ne' supplementi a due retti degli angoli A, B, C, e questi angoli ne' supplementi a due retti dei medesimi lati. In tal maniera s'avranno immantinente quest' altre due equazioni

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\ldots\ldots(t),$$

$$\tang\frac{a-b}{2}\cot\frac{c}{2}=\frac{\sen\frac{A-B}{2}}{\sen\frac{A+B}{2}}\ldots\ldots.(u).$$

Queste quattro equazioni serviranno dunque a trovare direttamente, e senza il soccorso d' un angolo sussidiario, i due angoli A, e B per mezzo dei due lati opposti a, e b coll' angolo contenuto C, o questi due lati per mezzo degli angoli opposti, e del terzo lato.

26. Avanti di terminare questa *Memoria* io credo di dover dir due parole del paragone dei triangoli sferici ai rettilinei. Prendendo, come si fa comunemente, il raggio della sfera per unità, è chiaro che gli archi, i quali formano un triangolo sferico, esprimono naturalmente degli angoli, di cui si trovano i seni, e i coseni nelle Tavole; se il raggio della sfera non è l' unita, allora, per aver il valore angolare de' lati del triangolo, bisogna dividere il valore assoluto pel raggio. Così, se α, β, γ son le lunghezze assolute degli archi, che formano un triangolo sferico sulla superficie d' una sfera, il cui raggio sia r, si avrà $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$ per gli angoli corrispondenti a questi archi; e siffatte quantità sono quelle, che bisognerà prendere per i lati, che abbiamo indicati per a, b, c, supponendo che A, B, C siano gli angoli opposti agli archi α, β, γ nel proposto triangolo.

Ora, se il raggio della sfera diventa infinitamente grande, la sua superficie si cangia in un piano, ed il triangolo sferico divien rettilineo. D' onde ne segue che, se nelle formule dei triangoli sferici si sostituiscan per tutto $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$

in luogo di a, b, c, che in seguito si supponga r infinitamente grande, e che avendo ridotti in serie i seni, e coseni di questi angoli, si rigettino i termini, che svaniscono per la suppo-sizione di $\frac{1}{r} = 0$, avremo il caso de' triangoli rettilinei, ne' quali α, β, γ sono i lati, ed A, B, C gli angoli opposti.

E perciò, se $V = 0$ è un' equazione tra i seni, e coseni di a, b, c, e di A, B, C, si sostituirà per sen a, $\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^3}{2.3r^3} +$ ec., per cos a, $1 - \frac{\alpha^2}{2r^2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4r^4} -$ ec., e per sen b, cos b, sen c, cos c dei valori simili, cangiando α in β, γ; e riducendo in serie secondo le potenze discendenti di r, il che darà

$$V = \frac{P}{r^m} + \frac{Q}{r^{m+1}} + \frac{R}{r^{m+2}} + \text{ec.},$$

avremo per il triangolo rettilineo l'equazione $P = 0$; imperocchè l'equazione $V = 0$ dà, moltiplicando per r^m, $P + \frac{Q}{r} + \frac{R}{r^2} + \text{ec.} = 0$, e facendo $\frac{1}{r} = 0$, si ha $P = 0$.

Si potrebbero di questa maniera dedurre le regole della Trigonometria rettilinea dall'equazioni fondamentali della Trigonometria sferica; ma ciò non avrebbe altra utilità che l'esercizio del calcolo, poichè ciò sarebbe dimostrare il semplice per il composto: noi ci contenterem d'osservare che l'equazione (d) del n.° 17. somministra immediatamente questa, cioè, cos A = sen B sen C — cos B cos C, o sivvero cos A = — cos (B + C), laonde A = 2 D — B — C, cioè A + B

$+C = 2D$, D essendo l'angolo retto; che è appunto la proprietà de' triangoli rettilinei.

27. Adesso, se il raggio r della sfera, invece d'essere infinitamente grande, è solamente molto grande, il triangolo sferico non diventerà rettilineo, ma vi s'approssimerà moltissimo; ed in questo caso, siccome gli angoli a, b, c, che corrispondono a' lati, diventano piccolissimi, le Tavole trigonometriche ordinarie non offriranno più una precision sufficiente per il calcolo de' lati, e degli angoli. V'è dunque allor del vantaggio a trattare i triangoli sferici come se fossero rettilinei, avendo riguardo alla piccola correzione, che risulta dalla lor differenza.

Il caso, di cui si tratta, ha luogo soprattutto nel calcolo dei triangoli, che si formano sulla superficie della Terra per misurare un'arco di Meridiano: in questi triangoli le quantità α, β, γ son le lunghezze medesime dei lati, e r è il raggio della Terra.

Per determinare la correzione, di cui abbiamo parlato, noi prenderem l'equazione (A) del n.° 14, che serve di fondamento a tutta la Trigonometria sferica, e dà

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Facciamo nel secondo membro le sostituzioni indicate quì sopra, ed arrestandoci ai termini divisi per r^4, avremo primieramente

$$\cos A = \frac{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2r^2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{2.3.4r^4} - \frac{\beta^2\gamma^2}{4r^4}}{\frac{\beta\gamma}{r^2}\left(1 - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3r^2}\right)}.$$

Moltiplicando il numeratore, e il denominatore della frazione per r^2, e sostituendo il fattore

$1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3r^2}$ in luogo del divisore $1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3r^2}$, avremo, trascurando i termini divisi per delle potenze maggiori di r^2,

$$\cos A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{2.3.4\beta\gamma r^2}+\frac{\beta^2\gamma^2}{4\beta\gamma r^2}$$
$$+\frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\ (\beta^2+\gamma^2)}{3.4\beta\gamma r^2}$$
$$=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{2.3.4\beta\gamma r^2};$$

e facendo $\frac{1}{r}=0$, l'angolo A divien l'angolo opposto al lato α nel triangolo rettilineo, di cui α, β, γ sarebbero i lati.

Indichiamo quest'angolo per A'; avrem dunque

$$\cos A'=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},$$

e quindi

$$\operatorname{sen} A'^2=\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\beta^2\gamma^2},$$

come abbiam veduto quì sopra (n.i 1, e 2); e perciò, sostituendo questi valori nell' equazion precedente, essa diventerà

$$\cos A=\cos A'-\frac{\beta\gamma \operatorname{sen} A'^2}{2.3.r^2}.$$

Ora, nel triangolo rettilineo, di cui α, β, γ sono i lati, è visibile che $\frac{\beta\gamma \operatorname{sen} A'}{2}$ n'esprime l'area. Dunque, se s'indica quest' area per θ, otterremo

$$\cos A=\cos A'-\frac{\theta \operatorname{sen} A'}{3r^2}.$$

Di quì ne proviene che, sino all' approssimazione di quantità, o valori dell' ordine $\frac{1}{r^4}$,

$$A = A' + \frac{\theta}{3r^2}.$$

E siecome cangiando il lato α in β, o γ, l'angolo A si cangia in B, o C, se s'indicheranno parimente per B', e C' gli angoli opposti ai lati β, e γ nel triangolo rettilineo, avremo egualmente

$$B = B' + \frac{\theta}{3r^2}, \text{ e}$$

$$C = C' + \frac{\theta}{3r^2};$$

poichè la quantità θ, eguale all' area del triangolo rettilineo, è una funzione, che dipende egualmente da' tre lati α, β, γ di modo ch' essa non cangia punto facendo fra queste quantità tutti i cangiamenti, o permutazioni, che si vorranno.

Dunque, allorchè si ha un triangolo sferico segnato sulla superficie d' una sfera, il cui raggio r è grandissimo, se si forma un triangolo rettilineo, i cui lati abbiano la stessa lunghezza di quelli del triangolo sferico, gli angoli di questo saranno eguali agli angoli corrispondenti del triangolo rettilineo, accresciuti ciascuno della quantità $\frac{\theta}{3r^2}$, θ essendo l'area del triangolo rettilineo, e procurando di ridurre il valore di questa quantità ad angoli, cioè, prendendo per unità l' angolo, che corrisponde all' arco eguale al raggio.

28. Se si aggiungono insieme le tre equazioni

$$A=A'+\frac{\theta}{3r^2},\ B=B'+\frac{\theta}{3r^2},\ C=C'+\frac{\theta}{3r^2},$$

s' ottiene $A+B+C=A'+B'+C'+\frac{\theta}{r^2}$; ma si sa che $A'+B'+C'=2D$, D essendo l' angolo retto; dunque avremo

$$\frac{\theta}{r^2}=A+B+C-2D.$$

Si può dunque conchiudere che sottraendo da ciascun angolo del triangolo sferico il terzo dell' eccesso della somma de' suoi tre angoli su due retti, avremo i tre angoli del triangolo rettilineo, i cui lati saranno eguali in lunghezza a quelli del triangolo sferico. Così potremo trattare questo triangolo come un triangolo rettilineo, ed i resultati saranno esatti sino all' approssimazion che comportano le quantità dell' ordine $\frac{1}{r^4}$.

Questo bel Teorema è dovuto a *Legendre*, che l' ha dato in primo luogo senza dimostrazione nelle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze dell' anno 1787, e che l' ha poi dimostrato in un modo poco diverso dal precedente nella sua *Memoria* sul metodo di determinar la lunghezza del quadrante di Meridiano. Siccome può essere d' una grande utilità per tutti i casi, in cui dobbiamo calcolar de' triangoli sferici poco differenti dai triangoli rettilinei, noi abbiamo creduto che sarebbe stato molto gradito quì ritrovarlo.

FINE DELLA MEMORIA DEL SIG. LAGRANGE.

COMPENDIO
DEI PARALELLI
DELLE
DUE TRIGONOMETRIE
INSERITI NEL TOMO XII.
DELLE MEMORIE
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

PARALELLI

DELLE TRIGONOMETRIE

1. La Piramide *tetraèdra* iscrittibile in un Cono retto, ossia co' tre lati o *spigoli* eguali, o colle tre *faccie* equicruri, è il fondamento, su cui riposa tutta la Dottrina Trigonometrica. Da siffatta Piramide nascon le *formule* conducenti a risolvere tutti i casi dei Triangoli *sferici*, e cambiatasi la medesima, come suo ultimo *limite*, in Prisma retto somministra per *corollario* quelle, da cui dipende l' analisi dei Triangoli *rettilinei*. Analizzati che siano i Triangoli *sferici*, non presentano nessuna nuova difficoltà i Poligoni parimente *sferici*, non altrimenti che i *rettilinei*; di modo che tutta la Poligonografia, e Poligonometria sì *sferica* che *rettilinea* dipendono affatto dalla già detta Piramide triangolare.

2. Perchè il Principio d' una Scienza, o Arte sia unico, egli debb' essere talmente classico, e generale che abbracci tutti i Principj secondarj come altrettante sue applicazioni, o derivazioni particolari. Parlando perciò di Trigonometria si fa manifesto che il Principio unico, e universale, su cui fondarla, non solamente debba prender di mira i Triangoli *sferici*, de' quali sono un *caso* speciale i *rettilinei*, ma referirsi oltracciò ai Triangoli *obliquangoli* in vece dei *rettangoli*, come quelli, in cui si convertono i primi cambiandosi uno, o più angoli *obliqui* in angoli *retti*. Fa ancor di mestieri che si partano dall' iste-

so Principio tutte le Formule, ed Equazioni sì *binomie* come *trinomie*, le quali abbracciano tutti i *casi* possibili della risoluzione di quei Triangoli, compresavi la misura dell'aree loro; ma oltrediciò egli è necessario che siano conseguenze del Principio medesimo tutte quelle sintetiche, ed analitiche verità, che nella dottrina de' Triangoli, e de' Poligoni i Matematici discopersero in varj tempi, ed usaronle nelle diverse ricerche spettanti all' Astronomia sferica, o nautica, alla Geografia, e Geodesia.

3. Riesce assai facile concepire che nelle accennate Piramidi *tetraèdre*, o Triangoli piramidati che voglian dirsi (suggeriti dalla Natura nei più semplici degli elementi delle sostanze cristallizzate, e col modo stesso ch' ell' offre l'esempio delle *Volute* nelle figure de' semi, o legumi coclearì dei Trifogli, cui i Botanici danno il nome di *Medicago tornata, doliata*, e *turbinata*), i tre angoli al vertice, che uniti forman l'angolo *solido*, son misurati, o rappresentati dai tre archi di Circoli *massimi* d' una Sfera, il cui centro sia collocato nel detto vertice, mentre le inclinazioni delle tre *faccie*, o piani triangolari, sono la cosa medesima dei tre angoli formati dai piani di quei tre archi, che determinano, o circoscrivono un Triangolo *sferico*.

4. Segue immantinenti da ciò che in virtù della Teoria degli angoli *solidi* un lato qualunque di Triangolo *sferico* deggia sempr' esser minore, come ne' *rettilinei*, della *somma* degli altri due rimanenti, e che la *somma* di tutti tre sia sempre minore d' un' intera circonferenza, valendo l'istesso anco riguardo al perimetro d' un *convesso* Poligono *sferico*. Stando ferma la base della Piramide, più che ne scemi l'altezza, più s'accosta al valore di sei angoli *retti* l'insieme

dei tre angoli del Triangolo sferico; *limite massimo*, cui non arrivan giammai, perchè allora il Triangolo diventa Emisfero: più che l'altezza n' aumenti, avvicinansi i tre detti angoli a uguagliar quelli delle tre *faccie* del Prisma *retto*, cioè alla *somma* di due soli angoli *retti*; *limite minimo*, ed ultimo, che compete al *caso* solo de' Triangoli *rettilinei*. Dunque gli estremi, tra cui racchiudonsi tutti i possibili Triangoli *sferici*, sono una Superficie emisferica da una parte, e dall'opposta un Triangolo *rettilineo*: la *scala* progressiva de' Triangoli *sferici* comincia subito dopo dell' Emisfero, e per innumerevoli gradi procede sino all' altro confine estremo, ch' è sempre un *rettilineo* Triangolo: tra i VI. angoli *retti*, ed i II. (entrambi esclusivamente) si distende la *somma* degli angoli delle varie infinite combinazioni dei lati de' Triangoli *sferici*; ed ecco come i II. *retti*, ultimo, ed unico *limite* rimanente, non possono che appartenere alla *somma* (perciò sempre costante) dei tre angoli d'un Triangolo *rettilineo* di qualunque *specie* egli sia. E così a scanso di considerare, com' altri han fatto, i Triangoli *rettilinei* sotto sembianza di Triangoli *sferici* infinitesimi, restan quelli sempre *finiti*, e determinati dalla base invariabile delle Piramidi, che cambian solo d'altezza sino a convertirsi alla fine nel Prisma. Le quali Piramidi, anco che fosser fornite di lati o spigoli disegnali, contuttociò coi tre angoli al vertice, e le vicendevoli inclinazioni de' piani delle lor *faccie* simboleggerebbero sempre dei Triangoli *sferici*, i cui lati, a pari dei *rettilinei*, segnano il più corto cammino da punto a punto sopra la Sfera, e paragonati comunque insieme due a due, per suggerimento dell' ordinaria dottrina elementare degli angoli *solidi*, han parimenti la lor differenza minore del terzo lato.

5. Nè manca tampoco per avventura ai Triangoli *sferici* appellati *simmetrici* la coincidenza scambievole tutte le volte che soprappongansi acconciamente, malgrado ciò che sin quì s' è creduto a differenza dei *rettilinei*. Non sussiste neppur l'eccezione che dati tre angoli d' un Triangolo *sferico* s' arrivi a conoscerne i lati, laddove per il contrario si giunga a determinarne nei *rettilinei* il loro solo rapporto. Conciossiachè, quanto all' ultimo punto di discrepanza supposta, ognun vede che senza la cognizione della lunghezza *assoluta* almeno d' un lato di Triangolo *sferico* non può mai conseguirsi dal valor noto dei suoi tre angoli se non che la lunghezza *relativa* dei lati appartenenti ad una serie infinita di Triangoli *sferici simili*, i quali giacciono sopra innumerabili superficie di Sfere concentriche, di raggio o grandezza *indeterminata*, siccome avviene l' istesso ne' *rettilinei*. Ed in proposito della coincidenza *per soprapposizione*, nel modo appunto che si rivoltano i *rettilinei simmetrici* perchè si combinino esattamente, così rivoltati due *sferici*, ed affacciate le loro *convessità* respettive, non v' è atomo degli innumerabili archi *omologhi* eguali, in cui può immaginarsi sciolta, come se ne fosse tessuta per dritto e per traverso, l'area dell'uno e dell'altro, che facendo destramente girare lungo il disteso degli archi stessi un *convesso* mobile sull' altro immobile, non vi s'adatti a vicenda, e perfettamente combaci in virtù di *soprapposizione* non simultanea, ma *successiva*.

6. Nulla incontrasi dunque nel *paralello* dei Triangoli *sferici*, e *rettilinei*, che rompa la loro naturale affinità, e cognazione; ambidue fanno parte dello stesso *genere*, o *classe*, e se giovi il dirlo, dell' istessa *famiglia*; sono anzi i *rettilinei* una *varietà* delli *sferici*; il passaggio dagli uni agli altri non è nemmen *saltuario*, ma seguitando

la legge di *continuità* dai primi si procede ai secondi in quella foggia medesima che dalle rette convergenti, o divergenti si passa all' equidistanti.

7. Tutto ciò presupposto, la Piramide triangolare, qualunque siasi Triangolo ch' ell' abbia per base, suggerisce immediatamente i due facilissimi Teoremi *elementari*, che seguono, nei quali è riposta in sostanza la somma delle Cose Trigonometriche.

TEOREMA I.

8. I *seni* degli angoli al vertice di ciascuna faccia della Piramide triangolare stanno tra loro come i *seni* degli angoli, o inclinazioni opposte de' piani dell' altre rimanenti due *faccie* (Fig.a *).

Preso a piacimento il punto E in un de' lati della Piramide DEGF, e condotta da quello la perpendicolare EO al piano della *faccia* opposta GDF, se dal punto d' incontro O conducansi le perpendicolari OI, OP agli altri due lati DG, DF, e poscia le rette EP, EI, son queste, per gli *Elementi di Geometria*, perpendicolari respettivamente ancor esse ai due medesimi lati. Dunque gli angoli EIO, EPO determinano le inclinazioni delle *faccie* adiacenti, e i loro *seni* sono $\frac{EO}{EI}$, $\frac{EO}{EP}$, quali stanno come EP: EI, cioè, come il *seno* dell' angolo EDF: *seno* dell' angolo EDG. Questa proporzione è l' origine di tutte l' Equazioni *binomie* Trigonometriche tra IV. parti, o *elementi* d' ogni Triangolo, cioè dell' Equazioni più semplici, cui possa *immediatamente* applicarsi il *Calcolo logaritmico*. E se la Piramide sia equicrure, gli uni, e gli altri *seni* stan sempre come l' aree delle sue *faccie*.

TEOREMA II.

9. Tutte poi l'Equazioni *trinomie* Trigonometriche tra IV., e anco V. *elementi* di qualunque Triangolo, o *sferico*, o *rettilineo*, nascono dalla considerazione dei *seni* insieme, e *coseni* degli angoli al vertice, e delle *faccie* della Piramide; e son quelle appunto, che per applicarvi i *logaritmi* han bisogno dell'introduzione *mediata* d'archi, o angoli *sussidiarj*.

Difatti, se in vece di EP, EI, adoprate nel passato *Teorema*, s'adoperin ora l'altre due rette OP, OI, essendo queste respettivamente espresse mediante EP moltiplicata per il *coseno* dell'angolo delle due *faccie* al comune *spigolo*, o lato DF, ed EI moltiplicata per il *coseno* dell' angolo delle due *faccie* al comune *spigolo*, o lato DG, sappiamo che trasformandosi la Piramide in Prisma-retto, la loro *somma* diventerebbe eguale a FG, d'onde proviene la forma *trinomia* dell' Equazione. Esponendosi dunque adesso, ed in seguito, i lati del Triangolo per *a*, *b*, *c*, e gli angoli opposti, per A, B, C, e trovata la forma dell' Equazione suggerita dal *limite*, questa, sostituitivi i nuovi *simboli*, è sen $a =$ sen b cos C + sen c cos B, o sivvero, a motivo dei *spigoli* nel detto *limite* paralelli, l'equipollente più generale cos b sen $a =$ cos a sen b cos C + sen c cos B, che si conferma verificandola coll'applicarla al *caso* speciale, in cui l'angolo B fosse *retto*. Imperocchè l'Equazione convertesi allora nella proporzione geometrica 1 : cos C : : tang b : tang a; e tale debb'essere, perchè EP : PO : : EM : GM (cadendo per la fatta ipotesi O in G) : : tang EDM : : tang GDM : : tang b : tang a come sopra.

10. L'Equazione classica *trinomiale*, ossia la relazione *cattolica* tra V. *elementi* de' Triangoli,

che fanno il soggetto delle due Trigonometrie, è la già in ultimo derivata sinteticamente dalla Piramide, ed è l'unico tronco di tutta la Scienza, da cui procedono come rami, più o men vicini all'origine, l'altre Equazioni a IV. *elementi*, che o per via di sostituzioni in virtù del I.° *Teorema*, o per mezzo de' noti Triangoli *supplementari*, o *polari*, o per altri artificj, e sussidj analitici conducono a diverse *formule*, e *analogie*. Eccone, in ordine alla successione lor naturale, il più adeguato Prospetto.

I.ª $\cos b \operatorname{sen} a = \cos a \operatorname{sen} b \cos C + \operatorname{sen} c \cos B$
II.ª $\cos c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \cos C + \cos b \cos a$
III.ª $\cot b \operatorname{sen} a = \cot B \operatorname{sen} C + \cos a \cos C$
IV.ª $\cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A \cos c - \cos B \cos A$.

La IV.ª di queste Equazioni *trinomie* è un'aperta replica della II.ª adattata al Triangolo *supplementare*: alla II.ª e alla III.ª (cioè alle *cardinali* Equazioni di *De Gua*, *Mauduit*, *Euler*, ec.) si giunge mercè della I.ª subitochè unitamente al I.° *Teorema* (o sivvero all' Equazione *binomia*) pongansi in uso le solite familiari sostituzioni. Han dunque siffatte Formule la proprietà di contenere in se *virtualmente* la forza riunita d'entrambi i *Teoremi*, onde soddisfare alla soluzione di tutti i VI. casi diversi possibili delle varie combinazioni (che in generale non sarebber meno di XV.) de' *quadernari* delle VI. parti, o *elementi* de' Triangoli *obliquangoli sferici*. E quando d'*obliquangoli* in genere si traformin essi in *rettangoli*, o da lor dipendenti, provengono dalle già scritte (ch'è quanto dir da una sola) le Formule *binomiali*, che abbracciano intera l'analisi de' VI. *casi* spettanti ai Triangoli *rettangoli sferici*. Esse sono

1.ª (B angolo *retto*) $\cot b = \cot a \cos C$ (I.ª)
2.ª (C angolo *retto*) $\cos c = \cos b \cos a$ (II.ª)
3.ª (*idem*) $\cot B = \cot b \,\mathrm{sen}\, a$ (III.ª)
4.ª (*idem*) $\cos c = \cot B \cot A$ (IV.ª)
5.ª (B, o A *retto*) $\cos C = \mathrm{sen}\, A \cos c = \mathrm{sen}\, B \cos c$ (IV.ª)
6.ª (B angolo *retto*) $\mathrm{sen}\, b = \dfrac{\mathrm{sen}\, a \cos b}{\cos a \,\mathrm{sen}\, A \cos c} = \dfrac{\mathrm{sen}\, a}{\mathrm{sen}\, A}$ (1.ª 2.ª 5.ª);

e si semplicizzano pe' i *birettangoli*, od altrettali, senza mai ledere per avventura la naturale derivazione analitica dei *casi* semplici dai composti. Scaturiscon difatti le stesse Formule da quella Piramide medesima triangolare contemplata sin da principio, e ciò tagliandola mediante il piano DEO, che dividerebbe il Triangolo *obliquangolo* ne' due adiacenti *rettangoli*.

11. Seguitando l'ordine divisato passiamo ai Triangoli *rettilinei obliquangoli*, che sono il *limite* delli *sferici*. Tutta la loro analisi è contenuta nel *limite* del *Teorema* I.°, che somministra l' Equazion *binomia simmetrica* $\dfrac{a}{\mathrm{sen}\, A} = \dfrac{b}{\mathrm{sen}\, B} = \dfrac{c}{\mathrm{sen}\, C}$, e nell'altro *limite* del *Teorema* II.°, che dà la Formula *trinomiale* di Carnot, comprendente V. *elementi*, applicabile ancora ai Poligoni (piani o nò), ed ai Polièdri egualmente, chiamando *lati* le loro *faccie*. Questa Formula classica, ed *unica* per tutti gli usi, e combinazioni della Trigonometria *rettilinea* consiste nell' Equazione fondamentale, ossia *prima*, e *generatrice* di tutte l' altre da lei *derivate*, segnata nel num.° antecedente, cioè,

$a = b \cos C + c \cos B$ (I.ª)
$b = a \cos C + c \cos A$ (II.ª)
$c = a \cos B + b \cos A$ (III.ª) } per simmetria.

Bastan queste allo scioglimento de' IV. *casi* dei Triangoli *obliquangoli* senza bisogno di spartirli in *rettangoli*; nè dee recar meraviglia che sien IV. soli invece de' VI. concernenti gli *sferici*. Perchè nel *limite* considerato della Piramide mutata in Prisma tra i *dati* contandosi o due angoli, o tre, le due combinazioni costituiscono quì un *caso* solo; e similmente avendosi un lato, e due angoli, e questi o adiacenti, o un adiacente, e l'altro opposto, metton in essere un solo *caso*; cosicchè dai VI. degli sferici venendone esclusi II., rimangon *utili* IV. pei *rettilinei*. E ciò nasce dal *limite* dell'area dei Triangoli *sferici*, la quale, in virtù del noto *Teorema* sintetico di Girard, e Cavalieri, essendo A + B + C — 2 D (rappresenta D l'angolo *retto*), si fa eguale a *zero* nel *limite* suddivisato, che simboleggiando i *rettilinei* d'ogni *specie*, corrispondenti agli *sferici* d'ogni sorte, manifesta sempre *costante*, ed eguale a due *retti* la *somma* dei tre angoli de' *rettilinei* Triangoli anco *simili* al *limite*, e perciò di qualunque grandezza *finita*.

Quando poi prendesse piacere dall' Equazioze de' V. *elementi* procedere a quella parimente universale de' IV., come nel precitato num.° 10, farebbe mestieri cercare il *limite* dell'Equazioni II.ª e III.ª dei Triangoli *sferici*; imperocchè dalla prima otterrebbesi la Formula *cattolica trinomiale*, dall' altra la *binomiale*. Difatti deducesi dalla II.ª per *limite* $1-\frac{c^2}{2}=ba\cos C+\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$, ovvero

$$2ba\cos C=b^2+a^2-c^2 \quad (\text{I.}^a)$$
$$\left.\begin{array}{l}2bc\cos A=b^2+c^2-a^2 \quad (\text{II.}^a)\\ 2ac\cos B=a^2+c^2-b^2 \quad (\text{III.}^a)\end{array}\right\}\text{simmetriche,}$$

che sono l'*elementare* d'*Euclide*, e *sommate* due a due generan l'altro di sopra, composte di V. *elementi*; di modo che queste si risolvono in quelle. Così, per esempio, unito la I.ª, e la III.ª danno $2a\,(b\cos C + c\cos B) = 2a^2$, cioè $a = b\cos C + c\cos B$. Ed il *limite* della III.ª del suddetto num.° 10. offre immediatamente $\frac{a}{b} = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} B}\operatorname{sen} C + (1 - \frac{a^2}{2})\cos C$, o sivvero $\frac{a}{b}\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(B + C) - \frac{a^2}{2}\cos C \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A - \frac{a^2}{2}\cos C \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A$; *binomiale* riconfermata di tutti i Triangoli coll' unico soccorso *diretto* del *Teorema* celebre di Tolomeo, risguardante i Quadrilateri inscritti nel Circolo. Seguono finalmente le Formule competenti al particolare dei Triangoli *rettilinei rettangoli*, e son IV. pe' i IV. *casi* possibili.

Posto B angolo *retto*

Dalla I.ª a V. *elementi*	$a = b\cos C$	(1.ª)
I.ª	$a = b\operatorname{sen} A$	(2.ª) perchè $C + A = D$
I.ª e III.ª	$a = c\operatorname{tang} A$	(3.ª)
(come sopra)	$a = c\cot C$	(4.ª) per l'istesso motivo.

12. A scanso di ricorrere ai *limiti*, come nel II.° *Teorema*, l'Equazion *trinomia* II.ª (numero 10) dominatrice di tutta intera la Trigonometria, perchè contenuta nelle viscere della I.ª, e dietro alla quale *Goudin* rintracciò l'intima dipendenza della medesima collegata coll' Ellisse conica d'*Apollonio*, senza però darne le prove (che si leggono nel III.° *Teorema* della *Memoria*, di cui questa è l'estratto), può ricavarsi agevolmente dallo sviluppo in piano delle tre *faccie* della Piramide (FDG, FDE, EDG), stando alla Fig.ª 198. della Tav.ª IX. del 1.° Vo-

lume. Imperciocchè, se nel Quadrilatero birettangolo SAOC conducasi dal punto A la perpendicolare a SC, ed altra a CO, è chiaro che SC $=$

$$SA \cos CSA + AO \operatorname{sen} CSA \text{, laonde } \frac{AO}{AB'} = \cos C$$

$$= \frac{SC - SA \cos CSA}{AB' \operatorname{sen} CSA} = \frac{\frac{SC}{SB''} - \frac{SA}{SB'} \cos CSA}{\frac{AB'}{SB'} \operatorname{sen} CSA} =$$

$$\frac{\cos CSB'' - \cos ASB' \cos CSA}{\operatorname{sen} ASB' \operatorname{sen} CSA} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b};$$

Equazione cospicua, perchè primitiva quanto l'altra del Triangolo piramidale *ortogonio*, la quale non solamente ha per *limite* l'*ipotenusa* di Pitagora, ma oltrediciò contiene in se stessa il principio, mercè di cui l'Analisi algebrica ha potuto poggiar tant'alto da conseguir la Formula universale per la misura di tutte le Superficie *curve* possibili.

13. Del rimanente i *paralelli* delle due Trigonometrie si manifestano tanto copiosi che, omettendo di notar quelli illustrati da Lagrange, ed altri insigni Analisti, gioverà intrattenersi per poco nell'affacciarne alcuni men ovvj, sebben dotati della maggiore eleganza, e mirabilmente d'accordo colle conosciute dottrine.

In primo luogo la normale EO pel *caso* del Prisma-retto (o Triangolo *rettilineo*) dietro alla scorta degli *Elementi Geometrici* si sa essere

$$= 2\frac{\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a+c-b)}{2}\frac{(c+b-a)}{2}}}{a},$$

ch'è *limite* appunto della normale della Piramide

(o Triangolo *sferico*) rappresentata dall' espressione *canonica*

$$\frac{2\sqrt{\left(\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{c+b-a}{2}\right)}}{\text{sen}\,a},$$

e serve allo spartimento *indiretto* dei Triangoli *ambligonj*, e *ossigonj* nei due *rettangoli* correspettivi. Quindi è che l'area d'un Triangolo *rettilineo* venendo ad essere, in virtù della detta espressione, $=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}$, ha il suo *paralello* correspettivo come *limite* a di sen a, ed $\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a+c-b)}{2}\frac{(c+b-a)}{2}$ *limite* parimente di $\left(\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\right)$ $\left(\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{c+b-a}{2}\right)$; e torna a dire EO perpendicolare sulla faccia del Prisma, *limite* della perpendicolar sulla faccia della Piramide. Non altrimenti da questo facile *paralello*, che non rilevasi con tanta chiarezza dalle Formule risguardanti l'area de' Triangoli *sferici* date da Lagrange, e Lhuillier, lucidissima sorge ancora la corrispondenza di tutta l'Agrimensura *sferica*, e *piana*, specialmente riposta nella dimension delle superficie dei Trapezj *sferico*, e *piano*. Ora l'espressione della misura Σ dell'ultimo (poste β, γ le basi, A l'altezza) vien dalla Formula generale $\tan\frac{\Sigma}{2}=\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$. Tang $\frac{A}{2}$, di cui è *li-*

mite $\frac{\Sigma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} . \frac{A}{2}$, che dà la misura evidente del primo. Son parimente delle seguenti Formule, conosciutissime dai Geometri, le seconde *paralelli*, e *limiti* delle prime:

14. Potrebbesi con tutt'agio spinger più oltre questo saggio de' *paralelli* tra le due categorie di Triangoli. L'ultimo dei precedenti, che si riporta alla Formula elegantissima di Legendre, abbraccia anco l'altra di Lagrange rovesciandola in $\frac{1}{\tan \frac{1}{2}\Sigma} = \cot \frac{1}{2}\Sigma$, siccome costa dagli *Elementi*. Di siffatte espressioni Trigonometriche in apparenza disparate, e difformi sene contan molt'altre, che poste a cimento del Calcolo scorgonsi poscia pienamente concordi. Un esempio di tale identità, e *sinonomia* (se così possa dirsi) lo mostra la Formula $\tan C = \frac{c \operatorname{sen} A}{b - c \cos A} = \frac{c \operatorname{sen}(B+C)}{b + c \cos(B+C)}$ nei Triangoli *rettilinei*. Imperocchè non solamente equivale a quella del *Teorema* I.° essendo $\frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \tan C$, d'onde nasce $b \operatorname{sen} C = c [\cos C \operatorname{sen}(B+C) - \operatorname{sen} C \cos(B+C)] = c \operatorname{sen}[(B+C) - C] = c \operatorname{sen} B$, ma di più ha nel suo grembo nascosto il modello dei Canoni *Neperiani*. Ed il vero, sciogliendosi tang C in $\tan\left[\frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)}{2}\right] = \frac{c \operatorname{sen}(B+C)}{b + c \cos(B+C)}$ per il penultimo *paralello* del num.° 13., questa espressione, a motivo di sen $(B+C) = \operatorname{sen} A$, diventa $\frac{c \operatorname{sen} A}{b - c \cos A}$, come sopra. L'*Astronomia sferica* affaccia parecchie *funzioni*, e la *Geometria* diverse *serie* di *Lambert*, *Jeaurat*, *Landen*, ec., che tranne la differenza della loro composizione, e sem-

bianza sono intimamente le stesse, e meriterebbero d'esser segnate in catalogo, come s'usa nei Dizionarj per i *sinonimi* delle Lingue.

15. E bensì da notarsi che avanti di ciò converrebbe dimostrar certe Formule indubitate, che son tuttavia mancanti di prova. Celebratissima è quella prodotta da Legendre dell'area S d'un Triangolo *rettilineo* eguale ad $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{\text{sen A sen B}}{\text{sen (A}-\text{B)}}$. Questa equivale (in virtù del *Teorema* I.°) ad $\frac{1}{2}ab\frac{(\text{sen A}+\text{sen B})(\text{sen A}-\text{sen B})}{\text{sen (A}-\text{B)}}=$
$\frac{1}{2}ab\frac{(\text{sen}^2\text{A}-\text{sen}^2\text{B})}{\text{sen (A}-\text{B)}}=\frac{1}{2}ab\frac{(\frac{1}{2}\cos 2\text{B}-\frac{1}{2}\cos 2\text{A})}{\text{sen (A}-\text{B)}}=$
$\frac{ab}{2}\frac{[\text{sen (A}+\text{B) sen (A}-\text{B)}]}{\text{sen (A}-\text{B)}}=\frac{ab}{2}.\text{sen (A}+\text{B)}$
$=\frac{ab}{2}.\text{sen C}$, com'è noto d'altronde.

Restava tuttavia da provarsi il Teorema pregevolissimo datoci da *Carnot*, ed è quello che la *somma* delle tre rette, che vadano ai vertici degli angoli di qualunquesiasi Triangolo *rettilineo* condotte dal punto d'incontro comune delle tre normali ai suoi lati partitesi dai medesimi vertici uguagli l'insieme dei due *diametri* del Circolo *circoscritto*, ed *inscritto* in esso Triangolo. Dalla considerazione dei III. Quadrilateri *birettangoli*, in cui resta spartito il Triangolo, rilevasi tosto che quelle tre distanze *radiali* riunite s'esprimono dalla vaghissima Formula 2R (cos A + cos B + cos C), posto R il *raggio* del Circolo *circoscritto*. Per altra parte si sa che cos A + cos B + cos C $=1+\frac{r}{R}$, stando r per il *raggio*

del Cerchio *inscritto*. Dunque il *coacervato* delle tre mentovate distanze è $2R\left(1+\frac{r}{R}\right)$, o sivvero $2R+2r$, a senso appunto del nuovo *Teorema*. Scaturisce di quì, e segnatamente dall' Equazione $2R(\cos A+\cos B+\cos C)=2R+2r$, la proprietà trigonometrico-geometrica non avvertita sinora, avvengachè lucidissima, e generale, cioè: „ In ogni Triangolo rettilineo stà il *Raggio* „ del Circolo *circoscritto* a quel dell' *inscritto* „ come il *Seno-tutto* alla differenza tra la somma dei *Coseni* de' suoi tre angoli, ed il *Seno-tutto* medesimo „.

In proposito della quale *circoscrizione*, e *inscrizione* giova succintamente soggiungere un altro manifestissimo *paralello*, che nella Piramide si contempla tra le serie infinite d' alcuni particolari Triangoli *sferici*, e *rettilinei*. Se difatti una faccia della Piramide si supponga passare per un de' *diametri* del Circolo *circoscritto* alla base, la separazione dei Triangoli *sferici* in due *equicruri* va del pari con quella dei sottoposti *rettilinei* ortogoni nel Prisma; l'aree *massime* (nell' ipotesi di due lati *dati*) si corrispondono parimente; il maggior angolo, come nell' *ortogonio*, si fa eguale alla somma dei due rimanenti; e finalmente vi si trova l'origine vera non tanto dell' Equazione $\text{sen}^2\frac{a}{2}=\text{sen}^2\frac{b}{2}+\text{sen}^2\frac{c}{2}$ nascente da $(2\,\text{sen})^2\frac{1}{2}a=(2\,\text{sen})^2\frac{1}{2}b+(2\,\text{sen})^2\frac{1}{2}c$, o sivvero $\text{Cord.}^2 a=\text{Cord.}^2 b+\text{Cord.}^2 c$, non meno che si parificano le condizioni del *maximum* di superficie sì dei Poligoni *sferici*, e *rettilinei isoperimetri*, sì delle solidità delle *sferiche*, e *piane* Piramidi, sì delle grandezze correspettive degli Angoli *solidi*.

16. Ella è dunque la Trigonometria *rettilinea* un *caso* particolar della *sferica*, ed un immediato di lei semplicissimo *corollario*. Qualora, dopo le cose premesse, restasse alcun dubbio sopra quest' intima vicendevole affinità a tutti gli effetti delle due sino ad ora distinte dottrine, e perchè risalti viepiù la sorgente comune dell' una e dell' altra, che risiede in quella parte medesima della Stereometria, da cui Haüy non ha guari di tempo attinse l' analisi *geometrica* dei Cristalli, non sarà discaro fermarsi alcun poco sul paragone d'un Triangolo *sferico* piccolissimo, e del *rettilineo* che abbia i tre lati egualmente lunghi di quelli del primo. Fu nel M.DCC.LXXXVII. che a gran vantaggio della dimensione *geografica* degli archi de' *Meridiani* terrestri, e del nuovo Sistema *metrico* dell' Impero Francese, il qual dipendeva da quell'esatta misura, sorse a pubblica luce il *Teorema* prestantissimo di Legendre, che stabilì i due suddetti Triangoli eguali tutte le volte che nel secondo ognuno degli angoli si faccia minore di ciascheduno del primo quanto importa il terzo dell' eccedenza di tutti tre dello *sferico* su due *retti*. Diversamente da Delambre, e Lagrange pare che possa dedursi ciò dal *confronto* delle due familiari Equazioni $a \text{ sen } B = b \text{ sen } A = b \text{ sen } (B + C)$ nel *rettilineo*,

$$\left(1 + \frac{ab}{2} \cos C\right) a \text{ sen } B = b \text{ sen } (B + C)$$ nello *sferico*, da cui resulta che il *limite* abbassasi, rispetto al valore degli *angoli*, d' un *grado* di più che riguardo a quello dei *lati*, onde può ben senz' errore farsi eguale su ciascun angolo la spartizion dell' eccesso θ, riducendoli ad $A - \frac{\theta}{3}$, $B - \frac{\theta}{3}$, $C - \frac{\theta}{3}$ nel loro *deficit*, così tripartito egualmente a vicenda.

Soprattutto però dee far corona a tutti i *paralelli* già esposti, e spiegati la considerazione antichissima, che si perde nel bujo dei Secoli scorsi, ed è che gli archi di Cerchio, a proporzione che crescon di raggio, scemano di *curvatura*, e s'accostano ad agguagliare le loro *corde*. Questa verità ben sentita dagli Architetti, non che dai Geometri di tutte l'età, fece sì che nell'edificazione dei Ponti *centinati* sul tipo d'Ovali *policentriche*, per combinare ad un tempo la loro sveltezza, e buon gusto, convenisse d'attendere cautamente o alla limitazione del *raggio* verso il *colmo* degli Archi, o a troncarli con qualche inganno al *serraglio* affine di coprirne il difetto. Bartolommeo Ammannati subito dopo la metà del Secolo XVI.° prescelse l'ultimo dei due partiti nel rifabbricarsi del terzo Ponte sull'Arno a Firenze (*a*). Avvengachè quello anteriore di Taddeo Gaddi del XIV.° Secolo servisse poscia d'esempio al Ponte di Norimberga, e a quei della Francia, non ha l'altro avuto imitatore nessuno in Europa fuori della Toscana. Fa meraviglia che accreditatissimo, com'egli è, ed è sempre stato tra i monumenti insigni delle Arti-Belle il *Ponte di S. Trinita*, non fossero ancora ben conosciute le sue vere misure nel M.DCCC.IX.°, e da moderno Scrittore si reputi costrutto di muro alla *rinfusa* (*en moellons*) (*b*), piuttostochè lavo-

(a) I *modini*, la *centina*, le *misure*, e l'*istoria* di questo celebratissimo Ponte posson vedersi nella Memoria intitolata *Della vera Curva degli Archi del Ponte a S. Trinita di Firenze Discorso geometrico.storico*. *Verona* 1809. (presso Molini, Landi, e C.°).

(b) *Traité de la construction des Ponts*. *Par M. Gauthey*. Vol. I. Lib. I. Sez. II. pag. 23. 24. fig. 1. 5. 17. 25. della Tav. I.

rato di cunei *(voussoirs)* o pietre *squadrate*. Non è vero tampoco che il *Ponte-Vecchio* sia andantemente coperto da Portici o Loggie, nè ch' esista in sull' Arno a Firenze un Ponte di marmo d' un arco solo con *balaustrate*, d' architettura di *Michelangiolo*, nè che sia di disegno del Valentuomo medesimo il Ponte *di Rialto* sul Canal-maggior di Venezia, e precisamente del M.D.LXXVIII, laddove ognun sa che *Buonarroti* morì nel M.D.LXIV., l' anno e giorno medesimo che *Galileo* nacque in Pisa, e che nè di *Michelangiolo*, nè di *Palladio*, com' altri scrissero, fu opera la detta Fabbrica, ma di *Jacopo da Ponte*, che da lui n' ebbe, per Decreto del Veneto Senato, l' onorevol cognome, a similitudine dei *Dondi Orologio*.

FINE.

NOTE

AGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA

NOTA I.

Sopra alcuni nomi, e definizioni.

Si sono introdotte in quest'Opera alcune espressioni, e definizioni nuove, che tendono a dare più esattezza e precisione al linguaggio Geometrico. Renderemo adesso contezza di questi cangiamenti, e ne proporremo alcun'altri, che potrebbero soddisfare più compiutamente alle stesse vedute.

Nella definizione ordinaria del *Paralellogrammo rettangolo* e del *quadrato* si dice che gli angoli di queste Figure son retti; sarebbe più esatto il dire che i loro angoli sono eguali. Perchè supporre che i quattro angoli d'un quadrilatero possono esser retti, come pure che gli angoli retti sono eguali tra loro, è un supporre delle proposizioni, che hanno bisogno d'essere dimostrate. Si eviterebbe quest'inconveniente, e molti altri del medesimo genere, se, in vece di porre le definizioni secondo l'uso alla testa d'un Libro, si distribuissero nel corso del Libro medesimo ciascuna nel posto dove ciò, che la definizione suppone, sia stato digià dimostrato.

La parola *Paralellogrammo*, secondo la sua etimologìa, significa *linee paralelle;* questa parola non conviene nulla più alla Figura di quattro lati che a quella di sei, di otto ec., i di cui lati opposti fossero paralelli. La parola *paralel-*

lepipedo significa parimente *piani paralelli;* e perciò non indica nulla più il solido a sei facce che quelli, i quali n'avessero otto, dieci, ec., di cui gli opposti fossero paralelli. Sembrerebbe dunque che le denominazioni di *paralellogrammo, e paralellepipedo*, che d'altronde hanno l'inconveniente d'esser lunghissime, dovessero esser bandite dalla Geometria. Si potrebbero a loro sostituire quelle di *rombo*, e *romboide*, che sono molto più comode, e conservare il nome di *losanga* al quadrilatero, i di cui lati son tutti uguali.

La parola *inclinazione* dev'essere intesa nel medesimo senso di quella d'*angolo;* l'una e l'altro indicano la maniera d'essere di due linee, o di due piani, che s'incontrano, ovvero che prolungati s'incontreranno. L'inclinazione di due linee è nulla allorchè l'angolo è nullo, vale a dire allorchè le due linee son paralelle, o coincidenti. L'inclinazione è la più grande allorchè l'angolo è il più grande, o allorchè le due linee fanno tra loro un angolo ottusissimo. La qualità di *pendere* è presa in un senso differente; una linea *pende* tanto più sopra un'altra quanto ella si allontana più dalla perpendicolare a quest'ultima.

Euclide ed altri Autori chiamano spesso *triangoli eguali* i triangoli, che non sono eguali se non che in superficie, e *solidi eguali* i solidi, che non sono eguali se non che in solidità. Ci è parso più convenevole chiamar questi triangoli, o questi solidi, *triangoli,* o *solidi equivalenti*, e di riserbar la denominazione di *triangoli eguali*, e *solidi eguali* a quelli, che posson coincidere per soprapposizione.

Dipiù è necessario distinguer nei solidi e superficie curve due specie d'egualità, che son differenti. In effetto due solidi, due angoli solidi, due triangoli, o poligoni sferici posson es-

ser eguali in tutte le loro parti costituenti, senza poter nulladimeno coincider per soprapposizione. Non sembra che quest'osservazione sia stata fatta nei Libri elementari, e frattanto bisogna aver riguardo a certe dimostrazioni fondate sopra la coincidenza delle Figure, che non riescono esatte. Tali sono quelle dimostrazioni, in virtù delle quali molti Autori pretendono di provare l'egualità dei triangoli sferici nei medesimi casi e nella stessa maniera che quella dei triangoli rettilinei; soprattutto se ne vede un esempio mirabile allorchè Roberto Simson (1) attaccando la dimostrazione della Prop. XXVIII. del Libro XI. d'*Euclide* cade egli stesso nell'inconveniente di fondar la sua dimostrazione sopra una coincidenza, che non esiste. Si è dunque creduto di dover dare un nome particolare a questa eguaglianza, che non porta alla coincidenza; noi l'abbiamo chiamata *eguaglianza per simmetria;* e le Figure, che sono in questo caso, le chiamiamo Figure *simmetriche*.

Così le denominazioni di Figure eguali, Figure simmetriche, Figure equivalenti si rapportano a delle cose diverse, e non deggiono esser confuse in una sola denominazione comune.

Nelle Proposizioni poi che riguardano i poligoni, gli angoli solidi, e i poliedri, abbiamo escluso quelli, i quali avessero angoli rientranti. Perchè, oltre alla convenienza di limitarsi negli Elementi alle Figure le più semplici, se questa esclusione non avesse luogo, certe Proposizioni o non sarebbero vere, o avrebbero bisogno di modificazione. Ci siamo dunque ristretti alla considerazion delle linee, e delle superficie

(1) Vedasi l'Opera di quest'Autore intitolata *Euclidis Elementorum Libri sex, etc. Glasguae*, 1756.

che chiamiamo *convesse*, e che son tali che una linea retta non può tagliarle in più di due punti.

Abbiamo impiegata frequentemente l'espressione *prodotto di due*, o *d'un più gran numero di linee*, per il quale s'intende il prodotto dei numeri, cui respettivamente queste linee sono eguali, valutandole secondo un'unità lineare presa a piacere. Il senso di questa espressione essendo fissato, non vi è alcuna difficoltà nell'usarla. S'intenderà nella maniera medesima ciò che significa il prodotto d'una superficie per una linea, d'una superficie per un solido, ec.; serve d'avere stabilito una volta per sempre che questi prodotti sono, o debbon esser considerati come prodotti di numeri, ciascun della specie che gli conviene. Così il prodotto d'una superficie per un solido non è altra cosa che il prodotto d'un numero d'unità superficiarie per un numero d'unità solide.

Spesso nel discorso ci serviamo della parola *angolo* per denotare il punto situato al suo vertice: questa espressione è viziosa. Sarebbe più chiaro, e più esatto esprimere con un nome particolare, come quello di *vertici*, i punti situati alle cime degli angoli d'un poligono, e d'un polièdro. Ecco come si deve intendere la denominazione di *vertici d'un polièdro*, di cui noi abbiamo fatt'uso.

Abbiamo oltracciò seguitata la definizione ordinaria di *Figure rettilinee simili*; ma noi osserveremo ch'esse contengono tre condizioni superflue. Perchè, affine di costruire un poligono, il numero dei cui lati sia n, bisogna in primo luogo conoscere un lato, ed in seguito avere la posizione dei vertici degli angoli situati fuori di questo lato. Ora il numero di questi angoli è $n-2$, e la posizione di ciascun vertice esige due dati; dal che si vede che il numero totale dei dati necessarj per costruire un poligono di n

lati è $1+2n-4$, ovvero $2n-3$. Ma nel poligono simile vi è un lato a piacere, e così il numero delle condizioni necessarie, perchè un poligono sia simile a un poligono dato, è $2n-4$. Ora la definizione ordinaria esige 1.° che gli angoli sien respettivamente eguali, e vale a dire n condizioni; 2.° che i lati omologhi sieno proporzionali, il che vuol dire $n-1$ condizioni. Vi son dunque $2n-1$ condizioni, cioè tre di più. Per ovviare a quest'inconveniente si potrebbe decomporre la definizione in due altre, cioè:

1.° *Due triangoli sono simili quando hanno due angoli respettivamente eguali:*

2.° *Due poligoni sono simili quando si posson formare nell'uno e nell'altro un medesimo numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti.*

Perchè tuttavia quest'ultima definizione non contenga essa pure delle condizioni superflue, fa di mestieri che il numero dei triangoli sia eguale al numero dei lati meno due; ciò può succedere in due maniere. Si può condurre da due angoli omologhi delle diagonali agli angoli opposti; allora tutti i triangoli formati in ciascun poligono avranno un vertice comune, ed il loro insieme sarà eguale al poligono; ovvero si può supporre che tutti i triangoli formati in un poligono hanno per base comune un lato del poligono, e per vertici quelli de' differenti angoli opposti alla detta base. Nell'uno e l'altro caso il numero de' triangoli formati da una parte e dall'altra essendo $n-2$; le condizioni della loro similitudine saranno in numero di $2n-4$; e la definizione non conterrà nulla di superfluo. Posta questa nuova definizione, l'antica diventerà un Teorema, che si potrà immediatamente provare.

Se la definizione delle Figure rettilinee simili è imperfetta nei Libri d'Elementi, quella

dei *solidi polièdri simili* lo è ancora di più. In *Euclide* questa definizione dipende da un Teorema non dimostrato; negli altri Autori ha l'inconveniente d'avere assai del superfluo. Noi abbiamo dunque rigettate siffatte definizioni dei solidi simili, e n'abbiamo sostituita un'altra fondata sopra i principj pocanzi esposti. Ma siccome vi son molte altre osservazioni da fare sopra questo soggetto, ritorneremo a parlarne in una *Nota* particolare.

La definizione della *perpendicolare ad un piano* può essere riguardata come un Teorema; quella poi dell'*inclinazione di due piani* ha bisogno pure d'essere giustificata mediante un ragionamento; più altre son nel medesimo caso. Ecco perchè nel conservare queste definizioni secondo l'uso antico abbiam avuto premura di citar le Proposizioni ov'esse son dimostrate; qualche volta ci siam contentati d'aggiungere un piccolo schiarimento sembrato sufficiente.

L'angolo formato dall'incontro *di due piani*, e *l'angolo solido* formato dall'incontro di più di due piani in un medesimo punto sono grandezze, ciascuna della sua specie, alle quali forse tornerebbe in acconcio di dar dei nomi particolari. Senza ciò egli è difficile d'evitare l'oscurità, e la circonlocuzione quando si parla delle disposizioni dei piani, che compongono la superficie d'un polièdro. E siccome la teoria di questi solidi è stata fino al presente poco coltivata, è meno disconvenevole introdurvi delle nuove espressioni, se queste sian richiamate dalla natura dell'argomento.

Io proporrei di chiamar *canto* l'angolo formato da due piani; la *costola*, o *spigolo*, o *vertice* del *canto* sarebbe l'intersezion comune di quei due piani. Il *canto* s'indicherebbe con quattro lettere, di cui le due medie corrisponderebbero alla costola o spigolo. Allora un *canto*

retto sarebbe l'angolo formato da due piani perpendicolari tra loro. Quattro canti retti riempirebbero tutto lo spazio angolare solido intorno ad una linea retta data. Questa nuova denominazione non impedirebbe che il canto non avesse sempre per sua misura l'angolo formato dalle due perpendicolari condotte in ciascuno dei piani da un medesimo punto del vertice, o intersezione comune.

Finalmente si potrebbe chiamare *angoloide* lo spazio angolare compreso tra più piani, che concorrono in un medesimo punto. L'angoloide s'indicherebbe con la lettera del vertice seguitata da tante altre lettere, quante sono le costole o spigoli riuniti nel vertice; l'*angoloide retto* sarebbe formato da tre piani perpendicocolari tra loro; otto angoli retti riempirebbero tutto lo spazio angolare sferico intorno ad un punto; e due angoloidi retti soprapposti mediante una faccia comune farebbero un canto retto.

E' necessario un dato solo per determinare il canto; più dati abbisognano per determinar l'angoloide. In generale, ogni angoloide intercetta sulla superficie della sfera, descritta dal suo vertice come centro, un poligono sferico; e se si chiami n il numero dei lati di questo poligono, il numero de' dati necessarj per determinare il poligono, e l'angoloide sarà $2n-3$. Quanto poi allo spazio angolare, ch'è la grandezza effettiva di ciascuno angoloide, desso è sempre proporzionale all'area del poligono sferico come sopra intercetto.

NOTA II.

Sopra una maniera di dimostrare la Proposizione XX. del primo Libro, ed alcune altre Proposizioni fondamentali della Geometria.

Fig. 1. Nella Dimostrazione della Proposizione XX. Lib. I. abbiamo supposto che essendo dato l'angolo A minore di due terzi d'un retto, e un punto D situato dentro di quest'angolo, è sempre possibile di far passare per il punto D una retta EF, che incontri nel medesimo tempo i due lati dell'angolo A. Questa possibilità è assai evidente per far la base d'una dimostrazione. Poichè, se si prendono delle parti eguali sopra i due lati dell'angolo, e si uniscano successivamente i punti egualmente distanti da A con le rette MN, M'N', M''N'', ec., è chiaro che queste rette si allontaneranno di più in più dal punto A, e che la lor distanza da questo punto potrà divenir maggiore d'ogni grandezza data. Dunque vi sarà una di queste rette M'N'. che passerà al di là del punto dato D, ed allora unendo N', e D, N'D E sarà la retta domandata.

Fig. 2. In *Euclide* si dimostra primieramente che due rette AB, CE, che fanno con una terza AC due angoli BAC, ACE, la cui somma è eguale a due retti, non potranno incontrarsi: dipoi si prende per conceduto che ogni retta AI condotta nell'angolo BAC deve incontrar la retta CE prolungandole ambedue sufficientemente. Se i due angoli BAC, ACE sono retti, il *Postulato* d'*Euclide* si riduce a questo: *Per poco che un angolo* IAC *sia minore d'un angolo retto, ogni retta* CE *condotta perpendicolarmente al lato* AC *debbe incontrare il lato* AI *prolungato*,

ovvero, prendendo l'angolo CAZ eguale a CAI, si può enunciarla ancora in quest'altra maniera: *Essendo dato l'angolo IAC, che differisca tanto poco, che si voglia, da due angoli retti, con un punto D situato in quest'angolo, dal quale si abbasserà DC perpendicolare sulla retta AC, che divide in due parti eguali l'angolo IAL, questa retta DC, prolungata sufficientemente, incontrerà sempre i lati dell'angolo IAL.*

Il *Postulato* d'*Euclide* è dunque, relativamente a un angolo differente quanto poco si vorrà da due angoli retti, il medesimo che quello, di cui ho fatt'uso relativamente ad un angolo tre volte minore, e dove l'intersezione è molto più manifesta. Dai diversi tentativi, che sono stati fatti fin quì per supplire al *Postulato* d'*Euclide* sembra che non si possa spingere più lontano il rigore delle dimostrazioni nella Proposizione XX. o sivvero, il che torna allo stesso, nella Teorìa delle Paralelle, salvo il partire da una Definizione della linea retta differente da quella, che serve di base a quest'Opera. Ma, se si considera quest'oggetto in una maniera più astratta, l'Analisi offre un mezzo tanto semplice quanto facile per dimostrare rigorosamente il Teorema concernente la somma dei tre angoli d'un Triangolo, come ancora le altre Proposizioni fondamentali della Geometria. Questo è quello, che noi andiamo a spiegare con tutte le particolarità necessarie.

Si dimostra immediatamente con la soprapposizione, e senza alcuna Proposizione preliminare che *due triangoli sono eguali quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente uguali*. Chiamiamo p il lato, di cui si tratta, A, e B i due angoli adiacenti, C il terzo angolo. Bisogna dunque che l'angolo C sia pienamente determinato quando si conoscono gli angoli A, e B col lato p; perchè, se

diversi angoli C potessero corrispondere ai tre dati elementi A, B, p, vi sarebbero altrettanti triangoli differenti, che avrebbero un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali; il che è impossibile: dunque l'angolo C dev'essere una funzione determinata delle tre quantità A, B, p; il che esprimo così; $C = \varphi : (A, B, p)$.

Sia l'angolo retto eguale all'unità: allora gli angoli A, B, C saranno dei numeri compresi tra 0, e 2; e poichè $C = \varphi : (A, B, p)$, io dico che la retta p non debb'entrare nella funzione φ. Infatti si è veduto che C debb'essere interamente determinato dai soli dati A, B, p senz'altro angolo, nè linea qualunque: ma la linea p è eterogenea rispetto ai numeri A, B, C; e, se si avesse un'equazione tra A, B, C,* p, si potrebbe ricavare il valore di p in A, B, C; e da ciò ne risulterebbe che p fosse eguale ad un numero; il che è assurdo: dunque p non può entrare nella funzione φ; e si ha in conseguenza semplicemente $C = \varphi : (A, B)$.... (1)

---

(1) Si è opposto a questa dimostrazione che, se ella fosse applicata, parola per parola, ai triangoli sferici, ne resulterebbe che due angoli cogniti servirebbero per determinare il terzo; il che non ha luogo in questa sorte di triangoli. La risposta è che nei triangoli sferici havvi un elemento di più che nei triangoli piani, e questo elemento si è il raggio della sfera, dal quale non si dee fare astrazione. Sia dunque r questo raggio; allora, in vece d'avere $C = \varphi (A, B, p)$, si avrà $C = \varphi (A, B, p, r)$, o solamente $C = \varphi \left(A, B, \frac{p}{r} \right)$, in virtù della legge degli omogonei. Ora, poichè il rapporto $\frac{p}{r}$ è un numero, come pure A, B, C, niente impedisce che $\frac{p}{r}$ non si trovi nella funzione φ, ed in tal caso non si può più concludere $C = \varphi (A, B)$.

Questa formula prova di già che, se due angoli d'un triangolo sono eguali a due angoli d'un altro triangolo, il terzo debb'essere eguale al terzo; e ciò posto, è facile d'arrivare al Teorema, che noi abbiamo in veduta.

Sia primieramente ABC un triangolo rettangolo in A; dal punto A abbassate AD perpendicolare sopra l'ipotenusa. Gli angoli B, e D del triangolo ABD sono eguali agli angoli B, ed A del triangolo BAC; dunque, secondo ciò che abbiam dimostrato, il terzo BAD è eguale al terzo C. Per la medesima ragione l'angolo DAC=B; dunque BAD+DAC, o BAC=B+C: ora l'angolo BAC è retto; dunque *i due angoli acuti d'un triangolo rettangolo, presi insieme, equivalgono ad un angolo retto*. Fig. 3.

Sia in seguito BAC un triangolo qualunque, e BC un lato, che non sia minore di ciascuno degli altri due: se dall'angolo opposto A si abbassa la perpendicolare AD sopra BC, questa perpendicolare cadrà dentro del triangolo ABC, e lo dividerà in due triangoli rettangoli BAD, DAC: ora nel triangolo rettangolo BAD i due angoli BAD, ABD equivalgono insieme ad un angolo retto; nel triangolo rettangolo DAC i due angoli DAC, ACD equivalgono pure a un angolo retto: dunque i quattro angoli riuniti, o solamente i tre BAC, ABC, ACB equivalgono insieme a due angoli retti: dunque *in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due angoli retti*. Fig. 4.

Da ciò si vede che questo Teorema, considerato a *priori*, non dipende punto da un concatenamento di Proposizioni, e che anzi si deduce immediatamente dal principio dell'omogeneità; principio che dee aver luogo in ogni relazione tra delle quantità qualunque esse siano. Ma proseguiamo, e facciam vedere che dalla medesima sorgente possono ricavarsi gli altri Teoremi fondamentali della Geometria.

Conserviamo le medesime denominazioni come di sopra, e chiamiamo di più m il lato opposto all'angolo A, e n il lato opposto all'angolo B. La quantità m debb'essere interamente determinata dalle sole quantità A, B, p; dunque m è una funzione di A, B, p, e $\frac{m}{p}$ n'è pure un'altra, di modo che si può fare $\frac{m}{p}=\psi:(A, B, p)$. Ma $\frac{m}{p}$ è un numero, come pure lo sono A, e B; dunque la funzione ψ non dee contenere la linea p, e si ha semplicemente perciò $\frac{m}{p}=\psi:(A, B)$, ovvero $m=p\psi:(A, B)$. Si ha dunque similmente $n=p\psi:(B, A)$.

Sia adesso un altro triangolo formato coi medesimi angoli A, B, C, ai quali sieno respettivamente opposti i lati m', n', p'. Poichè A, e B non cangiano, si avrà in questo nuovo triangolo $m'=p'\psi:(A, B)$, e $n'=p'\psi:(B, A)$. Dunque $m:m'::n:n'::p:p'$. Dunque *nei triangoli equiangoli i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali*.

La Proposizione concernente il quadrato dell'ipotenusa è, come si sa, una conseguenza di quella dei triangoli equiangoli: Ecco dunque tre proposizioni fondamentali della Geometria, cioè quella dei tre angoli d'un triangolo, quella dei triangoli equiangoli, e quella del quadrato dell'ipotenusa, che si deducono semplicissimamente, ed immediatamente dalla considerazione delle funzioni. Si possono ancora col medesimo metodo dimostrare succintamente le Proposizioni concernenti le Figure simili, ed i solidi simili.

Fig. 5. Sia ABCD un Poligono qualunque; avendo

scelto un lato AB, come base, fate tanti triangoli ABC, ABD, ec. sopra questa base quanti angoli C, D, E, ec. sono al di fuori. Sia la base $AB=p$; sieno A, e B i due angoli del triangolo ABC adiacenti al lato AB; sieno A', e B' i due angoli del triangolo ABD adiacenti al medesimo lato AB; e così di seguito. La Figura ABCDE sarà interamente determinata se si conoscerà il lato p con gli angoli A, B, A', B', A'', B'', ec.; ed il numero dei dati sarà in tutto $2n-3$, n essendo il numero de' lati del poligono. Ciò posto, un lato, o una linea qualunque x, condotta a piacimento nel poligono, sara una funzione di questi dati; e siccome $\frac{x}{p}$ debb'essere un numero, si potrà supporre $\frac{x}{p}=\psi:(A, B, A', B', \text{ec.})$ ovvero $x=p\,\psi:(A, B, A', B', \text{ec.})$, e la funzione ψ non conterrà p. Se con i medesimi angoli A, B, A', B' ec., ed un altro lato p' si forma un secondo poligono, si avrà per la linea x', corrispondente od omologa a x, il valore $x'=p'\,\psi:(A, B, A', B', \text{ec.})$; dunque $x : x' :: p : p'$. Si possono adunque definir le Figure così costrutte *Figure simili;* laonde *nelle Figure simili le linee omologhe sono proporzionali*. Così non solamente i lati omologhi, le diagonali omologhe, ma le linee terminate della stessa maniera nelle due Figure sono tra loro come due altre linee omologhe qualunquesiano.

Chiamiamo S la superficie del primo poligono; questa superficie è omogenea al quadrato p^2; bisogna dunque che $\frac{S}{p^2}$ sia un numero, che non contenga se non se gli angoli A, B, A', B', ec., di modo che si avrà $S=p^2\,\varphi:(A,$

B, A′, B′, ec.). Per la medesima ragione, se S′ è la superficie del secondo poligono, si avrà $S'=p'^2\,\varphi:(A, B, A', B', \text{ec.})$ Dunque $S:S'::p^2:p'^2$: dunque *le superficie delle Figure simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Passiamo adesso ai polièdri. Si può suppor che una faccia è determinata per mezzo d'un lato cognito p, e di più angoli A, B, C, ec. In seguito i vertici degli angoli solidi, fuori di questa base, saranno determinati ciascuno per mezzo di tre dati, che si possono riguardare come altrettanti angoli; di tal maniera che la determinazione intera del polièdro dipende da un lato p, e da più angoli A, B, C, il cui numero varia secondo la natura del polièdro. Ciò posto, una linea, che unisce due vertici, ovvero più generalmente, ogni linea x condotta in una maniera determinata nel polièdro sarà una funzione dei dati p, A, B, C, ec.; e siccome $\frac{x}{p}$ dev' essere un numero, la funzione eguale a $\frac{x}{p}$ non conterrà se non che gli angoli A, B, C, ec., onde si potrà supporre $x=p\,\varphi:(A, B, C, \text{ec.})$ La superficie del solido è omogenea a p^2; perciò questa superficie può rappresentarsi da $p^2\,\psi:(A, B, C, \text{ec.})$; la sua solidità è omogenea a p^3, e si può in conseguenza rappresentare mediante $p^3\,\Pi:(A, B, C, \text{ec.})$, essendo le funzioni indicate da ψ, e Π indipendenti da p.

Costruite un secondo solido coi medesimi angoli A, B, C, ec., ed un lato p' differente da p. Noi chiameremo i solidi così costrutti solidi simili; e ciò posto, la linea, che era $p\,\varphi:(A, B, C, \text{ec.})$, o semplicemente $p\,\varphi$ in un solido, sarà $p'\,\varphi$ in un altro; la superficie, che

era $p^2 \psi$ in uno sarà $p'^2\psi$ nel secondo, e finalmente la solidità, che era $p^3 \Pi$ in uno, sarà $p'^3 \psi$ nell' altro. Dunque 1.° *i solidi simili hanno i lati, o linee omologhe proporzionali; 2.° le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi; 3.° le loro solidità son come i cubi di questi medesimi lati.*

Gli stessi principj s'applican facilmente al circolo. Sia c la circonferenza, e s la superficie del circolo, il cui raggio è r: poichè non vi posson esser due circoli diseguali descritti col medesimo raggio, le quantità $\frac{c}{r}$, e $\frac{s}{r^2}$ devon essere funzioni determinate di r. Ma siccome queste quantità sono numeri, esse non debbono contenere nella loro espresssione la linea r; laondo s'avrà $\frac{c}{r}=\alpha$, e $\frac{s}{r^2}=\beta$, α e β essendo numeri costanti. Sia c' la circonferenza, e s' la superficie d'un altro circolo, il cui raggio è r'; dunque s'avrà ancora $\frac{c'}{r'}=\alpha$, e $\frac{s'}{r'^2}=\beta$. Dunque $c:c'::r:r'$, e $s:s'::r^2:r'^2$; dunque *le circonferenze dei circoli son come i loro raggi, e le lor superficie come i quadrati dei medesimi raggi.*

Consideriamo un settore, di cui r sia il raggio, e A l'angolo al centro; sia x l'arco, che termina il settore, e y la superficie di questo medesimo settore. Poichè il settore è interamente determinato quando si conoscono r, ed A, bisogna che x, e y sieno funzioni determinate di r, ed A; dunque $\frac{x}{r}$, e $\frac{y}{r^2}$ son pure delle funzioni simili. Ma $\frac{x}{r}$ è un numero, come pure $\frac{y}{r^2}$; dunque queste quantità non debbono conte-

nere r, e son semplicemente funzioni di A; di modo che si avrà $\frac{x}{r} = \varphi : A$, e $\frac{y}{r^2} = \psi : A$. Sien ora x', e y' l'arco, e la superficie d'un altro settore, di cui l'angolo è A, ed il raggio r'; chiameremo questi due settori *settori simili*; e poichè l'angolo A è uguale da una parte, e dall'altra, si avrà $\frac{x'}{r'} = \varphi : A$, e $\frac{y'}{r'^2} = \psi : A$. Dunque $x : x' :: r : r'$, e $y : y' :: r^2 : r'^2$; dunque *gli archi simili, ovvero gli archi de' settori simili son proporzionali ai raggi, e i medesimi settori son proporzionali ai quadrati de' raggi.*

È chiaro che si proverebbe nella stessa maniera che le sfere stanno come i cubi dei loro raggi.

Si suppone in tutto ciò, che precede, che le superficie si misurino col prodotto di due linee, e le solidità col prodotto di tre; ciò è facile a dimostrarsi anche col mezzo dell'Analisi. Consideriamo un rettangolo, le cui due dimensioni sono p, e q, e la sua superficie, ch'è una funzione di p, e q, rappresentiamola con $\varphi : (p, q)$. Se si considera un altro rettangolo, le cui dimensioni sono $p+p'$ e q, ognun vede che questo rettangolo è composto di due altri; uno cioè, che ha per dimensioni p, e q, l'altro, che ha per dimensioni p', e q; di modo che si avrà
$$\varphi : (p+p', q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (p', q).$$
Sia $p' = p$, si avrà $\varphi : (2p, q) = 2\varphi(p, q)$. Sia $p' = 2p$, si avrà $\varphi(3p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(2p, q) = 3\varphi(p, q)$. Sia $p' = 3p$, si avrà $\varphi(4p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(3p, q) = 4\varphi(p, q)$. Dunque in generale, se k è un numero intero qualunque, si avrà $\varphi(k p, q) = k\varphi(p, q)$, ovvero $\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$. Resulta da ciò che

$\frac{\varphi(p, q)}{p}$ è una funzione tale di p, che non cambia mettendo in luogo di p un multiplo qualunque kp. Dunque questa funzione è indipendente da p, e non dee contenere che q. Ma per una simil ragione $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ dee essere indipendente da q; dunque $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ non contiene nè p, nè q; e così questa quantità dee ridursi ad una costante α. Dunque si avrà $\varphi(p, q) = \alpha p q$; e siccome nulla impedisce di prendere $\alpha = 1$, si avrà $\varphi(p, q) = pq$; e così la superficie d'un rettangolo è uguale al prodotto delle due di lui dimensioni.

Si dimostrerebbe in una maniera affatto simile che la solidità d'un parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono p, q, r, è eguale al prodotto pqr delle sue tre dimensioni.

Osserverem terminando che la considerazione delle funzioni, che somministra una dimostrazion così semplice delle Proposizioni fondamentali della Geometria, è stata digià con successo impiegata per dimostrare i Principj fondamentali della Meccanica. *Vedete le Memorie di Torino, Tom. II.*

NOTA III.

Sull' approssimazione riportata nella Proposizione XVI. del Libro IV.

Allorchè si è trovato un raggio eccedente, ed uno deficiente, che non differiscono nelle prime cifre numeriche, si può terminare il calcolo in una maniera prontissima per mezzo d'una formula algebraica.

Sia a il raggio deficiente, e b l'eccedente, la cui differenza è piccola; sieno a', e b' i raggi seguenti, i quali si deducono dalle formule $b'=\sqrt{ab}$, $a'=\sqrt{\left(a.\frac{a+b}{2}\right)}$. Ciò, che si cerca, è l'ultimo termine della serie a, a', a'', ec., che è nel medesimo tempo quello della serie b, b', b'', ec. Chiamiamo quest'ultimo termine x, e sia $b=a(1+\omega)$; si potrà supporre $x=a(1+P\omega+Q\omega^2+$ ec.), P, e Q essendo coefficienti indeterminati. Ora i valori di b' e a' danno

$$b'=a(1+\tfrac{1}{2}\omega-\tfrac{1}{6}\omega^2+\text{ec.}),$$

$$a'=a(1+\tfrac{1}{4}\omega-\tfrac{1}{32}\omega^2+\text{ec.}).$$

E se si fa parimente $b'=a'(1+\omega')$ si avrà

$$\omega'=\tfrac{1}{4}\omega-\tfrac{5}{32}\omega^2+\text{ec.}$$

Ma il valore di x dev'esser lo stesso sia che la serie a, a', a'' ec. cominci per a, o per a'; dunque si avrà

$$a(1+P\omega+Q\omega^2+\text{ec.})=a'(1+P\omega'+Q\omega'^2+\text{ec.}).$$

Sostituendo in quest'equazione i valori di a', e di ω' in a, e ω, e paragonando i termini simili, se ne dedurrà $P=\frac{1}{3}$, e $Q=-\frac{1}{15}$; dunque

$$x=a(1+\tfrac{1}{3}\omega-\tfrac{1}{15}\omega^2).$$

Se i raggi a, e b si accordino nella prima metà delle loro cifre, si potrà trascurare il termine ω^2, ed il valor precedente si ridurrà a $x=a(1+\frac{1}{3}\omega)=a+\frac{b-a}{3}$. Così facendo $a=1,1282657$, e $b=1,1285063$, se ne dedurrà immediatamente $x=1,1283792$.

Se i raggi a, e b non s'accordino se non che nel primo terzo delle lor cifre, bisognerà prendere tre termini della formula precedente; così facendo $a=1,1265639$, e $b=1,1320149$, si troverà $x=1,1283791$.

Si potrebbe supporre che a, e b differisser di più tra di loro; ma allora bisognerebbe cal-

colare il valor di x mediante un numero maggiore di termini.

L'approssimazione, cui mira la Proposizione XIV., che è di Giacomo Gregory, è suscettibile di simigliante compendio. Noi rimandiamo all'Opera di quest' Autore intitolata *Vera Circuli, et Hyperbolae quadratura*; Opera di gran merito per il tempo, in cui comparve alla luce.

NOTA IV.

Ove si dimostra che il rapporto della circonferenza al diametro, ed il quadrato del rapporto medesimo son numeri irrazionali.

Consideriamo la serie infinita

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.z+1}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2}+\text{ec.},$$

di cui il termine generale è

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^2}{z.z+1.z+2\ldots(z+n-1)},$$

e supponghiamo che $\varphi:z$ ne rappresenti la somma. Se si pone $z+1$ in vece di z, $\varphi:(z+1)$ sarà parimente la somma della serie

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1.z+2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z+1.z+2.z+3}+\text{ec.}$$

Sottraendo una dall' altra di queste due serie (termine a termine) avremo $\varphi:z-\varphi:(z+1)$ per la somma del resto, che sarà

$$\frac{a}{z.z+1}+\frac{a^2}{z.z+1.z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2.z+3}+\text{ec.}$$

Ma questo resto può esser messo sotto la forma

$$\frac{a}{z.\overline{z+1}}\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+2.\overline{z+3}}+\text{ec.}\right);$$

ed allor si riduce ad $\frac{a}{z.\overline{z+1}}\,\varphi:(z+2)$. Dunque si avrà generalmente

$$\varphi:z-\varphi:(z+1)=\frac{a}{z.\overline{z+1}}\varphi:(z+2).$$

Dividiamo quest' equazione per $\varphi:(z+1)$, e, per semplicizzare il resultato, sia $\psi:z$ una nuova funzione di z, e tale che $\psi:z=\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi:(z+1)}{\varphi:(z)}$;

allora si potrà mettere $\frac{a}{z\,\psi:z}$ in vece di $\frac{\varphi:z}{\varphi:(z+1)}$, e $\frac{(z+1)\psi:(z+1)}{a}$ in vece di $\frac{\varphi:(z+2)}{\varphi:(z+1)}$. Fatta dunque la sostituzione, si avrà $\varphi:z=\frac{a}{z+\psi\,(z+1)}$.

Ma mettendo successivamente in questa equazione $z+1$, $z+2$, ec. in luogo di z, ne resulterà

$$\psi:(z+1)=\frac{a}{z+1+\psi:(z+2)},$$

$$\psi:(z+2)=\frac{a}{z+2+\psi:(z+3)},\ \text{ec.}$$

Dunque il valore di $\psi.z$ può esprimersi dalla frazion continua

$$\psi:z=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\text{ec.}}}}$$

Reciprocamente questa frazion continua, prolungata all'infinito, ha per somma $\psi:z$, o la

sua quantità eguale $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi:(z+1)}{\varphi:z}$; e questa somma, sviluppata in serie ordinarie, è

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1\,.\,z+2}+\text{ec.}}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z\,.\,z+1}+\text{ec.}}.$$

Sia adesso $z=\frac{1}{2}$, la frazion continua diverrà

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{ec.}}}},$$

nella quale i numeratori, eccettuato il primo, son tutti uguali a $4a$, e i denominatori forman la serie de' numeri impari 1, 3, 5, 7, ec. Il valore di questa frazion continua può dunque esprimersi mediante

$$2a.\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3\ldots7}+\text{ec.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3\ldots6}+\text{ec.}}.$$

Ma queste serie si rapportano a delle formule cognite, e si sa che rappresentando con e il numero, il cui logaritmo iperbolico è 1, l'espression precedente riducesi ad

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}.\sqrt{a};$$

di modo che si avrà in generale

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{ec.}}}}$$

Da ciò resultano due formule principali secondo che a è positiva, o negativa. Sia primieramente $4a = x^2$, si avrà

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^3}{5 + \text{ec.}}}}$$

Sia in seguito $4a = -x^2$, ed in virtù della formula d'altronde cognita

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.\,\text{tang}.\,x, \text{ si avrà}$$

$$\text{tang}.\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \text{ec.}}}}}$$

Questa è la formula, che servirà di base alla nostra dimostrazione. Ma bisogna, prima di tutto, dimostrare i due Lemmi seguenti.

LEMMA I. *Sia una frazion continua prolungata all' infinito*

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \text{ec.}}}},$$

nella quale tutti i numeri m, n, m$'$, n$'$, ec. *son interi positivi, o negativi: se si suppone che le frazioni componenti* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ec. *sieno tutte minori dell' unità, io dico che il valor totale della frazion continua sarà necessariamente un numero irrazionale.*

Dico, in primo luogo, che questo valore sarà minore dell' unità. Infatti, senza diminuir la generalità della frazion continua, si posson

supporre tutti i denominatori n, n', n'', ec. positivi; ora, se si prende un sol termine della serie proposta, si avrà, per ipotesi, $\frac{m}{n} < 1$. Se si prendono i due primi, a causa di $\frac{m'}{n'} < 1$, è chiaro che $n + \frac{m'}{n'}$ è maggiore di $n - 1$: ma m è minore di n, e poichè l'uno e l'altro son numeri interi, m sarà ancor più piccolo di $n + \frac{m'}{n'}$. Dunque il valor, che resulta dai due termini

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n'}},$$

è minore dell'unità. Calcoliamo tre termini della frazion continua proposta; ed in primo luogo, conforme a ciò che abbiamo veduto, il valore della parte

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$$

sarà minore dell'unità. Chiamiamo questo valore ω, ed è chiaro che $\frac{m}{n+\omega}$ sarà pure minore dell'unità: dunque il valore, che resulta dai tre termini

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}},$$

è minore dell'unità. Continuando il medesimo ragionamento, qualunque sia il numero dei termini, che si calcolano, della frazion continua proposta, il valore, che ne resulta, è minore

dell' unità: dunque il valor totale di questa frazione prolungata all' infinito è pur minore dell' unità. Esso non potrà esser eguale all' unità se non che nel solo caso che la frazion proposta fosse della forma

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{ec.}}}}$$

in qualunque altro caso essa sarebbe sempre più piccola

Ciò posto, se si nega che il valore della frazion continua proposta sia eguale ad un numero irrazionale, supponghiamo che sia eguale ad un numero razionale, e sia questo numero $\frac{B}{A}$, B ed A essendo numeri interi qualunque; dunque si avrà

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{ec.}}}}$$

Sieno C, D, E, ec. numeri indeterminati tali che si abbia

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\text{ec.}}}},$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{\text{iv}}}{n^{\text{iv}}+\text{ec.}}}},$$

e così in infinito. Queste differenti frazioni continue avendo tutti i termini minori dell' unità, i loro valori o somme $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, ec. saran-

no, secondo ciò che abbiam dimostrato, minori dell' unità, e così si avrà $B < A$, $C < B$, $D < C$, ec.; di modo che la serie A, B, C, D, E, ec. sarà decrescente all'infinito. Ma il concatenamento delle frazioni continue, di cui si tratta, dà

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{n+\frac{C}{B}}\text{, d' onde resulta } C=mA-nB;$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'+\frac{D}{C}}\text{, d' onde resulta } D=m'B-n'C;$$

$$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{E}{D}}\text{, d' onde resulta } E=m''C-n''D,$$

ec. ec.

E poichè i due primi numeri A e B sono interi, per supposizione, ne segue che tutti gli altri C, D, E, ec., che fino ad ora erano indeterminati, son pure numeri interi. Ora, implica contradizione che una serie infinita A, B, C, D, E, ec. sia ad un tempo decrescente, e composta di numeri interi, perchè d' altronde alcuno de' numeri A, B, C, D, E, ec. non può essere zero, a motivo che la frazion continua proposta si estende all' infinito, e che le somme rappresentate da $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, ec. deggiono esser sempre di qualche valore. Dunque l' ipotesi che la somma della frazion continua proposta sia eguale ad una quantità razionale $\frac{B}{A}$, non può mai sussistere. Dunque questa somma è necessariamente un numero irrazionale.

Lemma II. *Poste le medesime cose, se le frazioni componenti* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ec. *son d' una gran-*

dezza qualunque al principio della serie, ma che dopo un certo intervallo esse sieno costantemente minori dell' unità; dico che la frazion continua proposta, supponendo sempre che dessa si estenda all' infinito, avrà un valore irrazionale.

Perchè, se a contare da $\frac{m'''}{n'''}$, per esempio, tutte le frazioni $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}}}$, $\frac{m^{\text{V}}}{n^{\text{V}}}$, ec. all' infinito son minori dell' unità, allora, secondo il Lemma I, la frazion continua

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}} + \cfrac{m^{\text{V}}}{n^{\text{V}} + \text{ec.}}}}$$

avrà un valore irrazionale. Si chiami questo valore ω, e la frazion continua proposta diventerà

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega}}}.$$

Ma se si fa successivamente

$$\frac{m'' + \omega}{m''} = \omega', \quad \frac{m'}{n' + \omega'} = \omega'', \quad \frac{m}{n + \omega''} = \omega''',$$

è chiaro che, ω essendo irrazionale, tutte le quantità ω', ω'', ω''' lo debbon essere parimente. Ora, l' ultima ω''' è eguale alla frazion continua proposta; dunque il valore di questa è irrazionale.

Possiamo adesso, per ritornare al nostro principal soggetto, dimostrare questa Proposizion generale.

TEOREMA

Se un arco è commensurabile col raggio, la sua

tangente sarà incommensurabile col medesimo raggio.

Infatti, sia il raggio $= 1$, e l'arco $x = \frac{m}{n}$, m e n essendo numeri interi, la formula trovata di sopra darà, facendo la convenevole sostituzione,

$$tang\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \text{ec.}}}}}$$

Ora questa frazion continua è nel caso del Lemma II; perchè è chiaro che i denominatori $3n$, $5n$, $7n$, ec. aumentando continuamente, mentre che il numeratore m^2 resta della stessa grandezza, le frazioni componenti saranno, o diverranno ben presto minori dell'unità; dunque il valore di tang $\frac{m}{n}$ è irrazionale; dunque, *se l'arco è commensurabile col raggio, la sua tangente sarà incommensurabile.*

Da ciò resulta, come immediatissima conseguenza la Proposizione, che fa l'oggetto di questa Nota. Sia π la mezza-circonferenza, il cui raggio è 1; se π fosse razionale, l'arco $\frac{\pi}{4}$ lo sarebbe pure, e per conseguenza la sua tangente dovrebbe essere irrazionale: ma si sa, pel contrario, che la tangente dell'arco $\frac{\pi}{4}$ è uguale al raggio 1; dunque π non può essere razionale. Dunque *il rapporto della circonferenza al diametro è un numero irrazionale* (1).

---

(1) Questa Proposizione è stata dimostrata per la prima volta da Lambert nelle Memorie di Berlino dell'anno 1761.

E' probabile che il numero π non sia compreso tra gli irrazionali algebrici, e vale a dire che non possa essere la radice d'un'equazione algebrica composta d'un numero finito di termini, i cui coefficienti son razionali: ma sembra difficilissimo il poter dimostrar rigorosamente questa Proposizione; noi possiamo sol far vedere che il quadrato di π è pure un numero irrazionale.

Infatti, se nella frazion continua, che esprime tang. x, si fa $x=\pi$, a causa di tang. $\pi=0$, si dee avere

$$0=3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\text{ec.}}}}$$

Ma se π^2 fosse razionale, e si avesse $\pi^2=\frac{m}{n}$, m e n essendo numeri interi, ne resulterebbe

$$3=\cfrac{m}{5n-\cfrac{m}{7n-\cfrac{m}{9n-\cfrac{m}{11n-\text{ec.}}}}}$$

Ora è visibile che questa frazion continua è pure nel caso del Lemma II.; il suo valore è dunque irrazionale, e non può essere uguale al numero 3. *Dunque il quadrato del rapporto della circonferenza al diametro è un numero irrazionale.*

NOTA V.

Ove si dà la soluzione analitica di diversi Problemi concernenti il triangolo, il quadrilatero iscritto, il paralellepipedo, e la piramide triangolare.

PROBLEMA I.

Essendo dati i tre lati d' un triangolo, trovar la sua superficie, il raggio del circolo iscritto, ed il raggio del circolo circoscritto.

Sieno i lati $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; se dal vertice A si abbassa la perpendicolare AD sopra il lato opposto BC, s' avrà * $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD$; dunque $BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Fig. 3. * 12. 3.

Questo valore dà $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$, ovvero $\overline{AD}^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$; dunque $AD=\frac{\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}}{2a}$. Sia S l'area del triangolo, si avrà $S=\frac{1}{2}BC\times AD$; dunque $S=\frac{1}{4}\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}=\frac{1}{4}\sqrt{[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]}$. Questa formula può ancora ridursi ad un' altra espressione più comoda per il calcolo logaritmico; al qual fine bisogna osservare che la quantità $4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$ è il prodotto dei due fattori $2ac+(a^2+c^2-b^2)$, e $2ac-(a^2+c^2-b^2)$; il primo $=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$; il secondo $=b^2-(a-c)^2=(b+a-c)(b-a+c)$: dunque si avrà $S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$.

Finalmente, se si fa $\frac{a+b+c}{2}=p$, ciò che dà $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $b+c-a=2p-2a$, s'avrà ancora più semplicemente

$$S=\sqrt{(p.p-a.p-b.p-c)}.$$

Dal che si vede che per avere la superficie d'un triangolo rettilineo, di cui son dati i tre lati, bisogna prendere la mezza-somma de' tre lati, da questa mezza-somma toglier successivamente ciascun de' lati, il che darà tre resti, moltiplicar questi tre resti tra loro, e per la mezza-somma dei lati, e finalmente estrar la radice quadrata dal prodotto: questa radice sarà l'area del triangolo.

Sia adesso z il raggio del circolo circoscritto al triangolo, ed u il raggio del circolo iscritto in questo medesimo triangolo; s'avrà secondo la Prop. XXXII. Lib. III.,

$z=\frac{\frac{1}{4}abc}{S}$, ed $u=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p}$; dunque, sostituendo il valore trovato di S, verrà

$$z=\frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p.p-a.p-b.p-c)}},\ u=\sqrt{\left(\frac{p-a.p-b.p-c}{p}\right)}.$$

PROBLEMA II.

Essendo dati i quattro lati d'un quadrilatero iscritto in un circolo, trovare il raggio del circolo, la superficie del quadrilatero, ed i suoi angoli.

Fig. 4. Sieno i lati dati $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, e le diagonali incognite $AC=x$, $BD=y$: si avrà, secondo il Teor. 33. del L. III., $xy=ac+bd$, e $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, da cui si ricava

$$x=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)},\ y=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)}.$$

Ma, secondo il Problema precedente, il raggio del circolo circoscritto al triangolo ABC, i cui lati sono a, b, x, può esprimersi con la formula

$$z=\frac{abx}{\sqrt{[4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2]}}.$$

Sostituendo in vece di x il valore, che abbiamo trovato, e decomponendo il resultato in fattori, si avrà

$$z=\sqrt{\left[\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}\right]}.$$

Ciò posto, l'area del triangolo $ABC=\frac{\frac{1}{4}abx}{z}$; quella del triangolo $ADC=\frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$; dunque l'area del quadrilatero $ABCD=\frac{1}{4}.\frac{(ab+cd)x}{z}$ $=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)]}$.
E se si facesse, per abbreviare, $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, s'avrà l'area $ABCD=\sqrt{[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)]}$.
Finalmente, affin d'ottenere uno qualunque degli angoli, per esempio l'angolo B, si osserverà che il triangolo ABC dà $\cos B=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$; sostituendo il valor di x, e riducendo, s'avrà $\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$. Da ciò si ricava $\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$, ovvero $\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}B=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}=$

$\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$. Dunque tang. $\frac{1}{2}$ B $=$
$\sqrt{\left(\frac{p-a \,.\, p-b}{p-c \,.\, p-d}\right)}$.

PROBLEMA III.

Fig. 5.

Nel quadrilatero ABDC, *di cui gli angoli opposti* B, *e* C *son retti, essendo dati i due lati* AB, AC *con l'angolo contenuto* BAC, *trovare gli altri due lati, e la diagonale* AD.

Sia AC$=b$, AB$=c$, e l'angolo BAC$=$A; se si prolungano BD, ed AC fino al loro incontro in E, il triangolo BAE rettangolo in B, di cui si conoscono l'angolo BAE, ed il lato AB, darà AE$=\frac{c}{\cos A}$; dunque CE$=\frac{c}{\cos A}-b$. In seguito il triangolo DCE rettangolo in C, del qual si conoscono il lato CE, e l'angolo CDE$=$A, darà CD$=$CE cot A$=\frac{c-b\cos A}{\operatorname{sen} A}$. Si avrà dunque similmente BD$=\frac{b-c\cos A}{\operatorname{sen} A}$. Questi sono i valori de' due lati cercati del quadrilatero.

Da ciò resulta la diagonale AD$=\sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{DC}^2)}=$
$\sqrt{\left(b^2+\left(\frac{c-b\cos A}{\operatorname{sen} A}\right)^2\right)}=\frac{\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos A)}}{\operatorname{sen} A}$.
Ma in virtù del triangolo BAC si avrà BC$=\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos A)}$. Dunque la diagonale AD, che unisce i due angoli obliqui, stà alla diagonale BC, che unisce i due angoli retti, :: 1 : sen A.

Scolio. La diagonale AD è ad un medesimo tempo il diametro del circolo, nel quale il quadrilatero ABDC fosse iscritto.

In questo circolo si avrebbe l'angolo $ABC = ADC$; dunque, abbassando CF perpendicolare sopra AB, i triangoli BFC, ADC sono simili, e danno $AD : BC :: AC : FC :: 1 : \text{sen } A$; il che si accorda colla determinazion precedente.

PROBLEMA IV.

Essendo date le tre costole, o spigoli d'un paralellepipedo con gli angoli, ch' essi fanno tra loro, trovar la solidità del paralellepipedo stesso.

Sieno le costole, o spigoli $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$, e gli angoli contenuti $ASB = \alpha$, $ASC = \beta$, $BSC = \gamma$. Se dal punto C si abbassi CO perpendicolare sul piano ASB, il triangolo rettangolo CSO darà $CO = CS \text{ sen } CSO = h \text{ sen } CSO$. D'altronde la superficie del paralellogrammo $ASBP = fg \text{ sen } \alpha$. Dunque, se si chiami S la solidità del paralellepipedo ST, si avrà $S = fgh \text{ sen } \alpha \text{ sen } CSO$. Resta a trovare sen CSO. Fig. 6.

Per questo dal punto S, come centro, e con un raggio $= 1$, descrivete una superficie sferica, che incontri in D, E, F, G, le rette SA, SB, SC, SO; avrete un triangolo DEF, nel quale l'arco FG è perpendicolare sopra ED, poichè il piano CSO è perpendicolare sopra ASB. Ora il triangolo DEF, del quale s'hanno i tre lati $DE = \alpha$, $DF = \beta$, $EF = \gamma$, dà $\cos E = \dfrac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma}$, e $\text{sen } E =$

$$\frac{\sqrt{(1 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma}.$$

Dipiù il triangolo rettangolo EFG dà sen GF, ovvero $\text{sen } CSO = \text{sen } E \text{ sen } EF = \text{sen } \gamma \text{ sen } E$. Dunque $S = fgh \text{ sen } \alpha \text{ sen } \gamma \text{ sen } E$, ovvero

$$S = fgh \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}$$

In quest' espressione la quantità sotto il radicale è il prodotto di due *fattori* $\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma + \cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma$, e $\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma - \cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma$. Il primo $= \cos\beta - \cos(\alpha+\gamma) = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\text{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$; il secondo $= \cos(\alpha-\gamma) - \cos\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ $\text{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Dunque la solidità cercata $S = 2fgh\surd$ $\left[\text{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right]$.

PROBLEMA V.

Poste le medesime cose che nel precedente Problema, trovar l' espressione della diagonale, che unisce due vertici opposti.

Sia la diagonale della base $SP = z$, e la diagonale cercata $ST = u$; il triangolo ASP nel quale $\cos SAP = -\cos\alpha$, darà $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg\cos\alpha$; parimente il triangolo TSP, nel quale $\cos TPS = -\cos CSP$, darà $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz\cos CSP$. Non si tratta adesso che d' avere il coseno dell' angolo CSP, o dell' arco FH: ora nel triangolo sferico EFH si ha $\cos FH = \cos EF \cos EH + \text{sen}\,EF$ $\text{sen}\,EH \cos E$; sostituendo i valori $EF = \gamma$, e $\cos E = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma}$, verrà $\cos FH = \cos\gamma\cos EH +$ $\frac{\text{sen}\,EH}{\text{sen}\,\alpha}(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) = \frac{\text{sen}\,EH\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha} +$ $\frac{\text{sen}(\alpha - EH)\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,EH\cos\beta + \text{sen}\,DH\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$.
Dunque $2hz\cos FH$, ovvero $2hz\cos CSP = 2h$ $\cos\beta\frac{z\,\text{sen}\,EH}{\text{sen}\,\alpha} + 2h\cos\gamma.\frac{z\,\text{sen}\,DH}{\text{sen}\,\alpha}$. Ma nel trian-

golo BSP si ha $BP = \frac{SP \text{ sen } BSP}{\text{sen } SBP}$, e $BS = \frac{SP \text{ sen } BPS}{\text{sen } SBP}$, il che dà $\frac{z \text{ sen } EH}{\text{sen } \alpha} = f$, e $\frac{z \text{ sen } DH}{\text{sen } \alpha} = g$. Dunque $2hz \cos CSP = 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma$. Dunque finalmente il quadrato della diagonale cercata $u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma$.

Corollario. L'angolo solido A è formato dalle tre costole, o spigoli f, g, h, che fanno tra loro, due a due, gli angoli $200^\circ - \alpha$, $200^\circ - \beta$, γ; così basta di cangiare i segni di $\cos \alpha$, e $\cos \beta$ nell'espressione di $\overline{SE}^2$ per aver quella di $\overline{AM}^2$. Facendo lo stesso per le altre due diagonali, s'avranno i valori dei loro quadrati, come appresso:

$$\overline{ST}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma;$$
$$\overline{AM}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \alpha - 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma;$$
$$\overline{BN}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta - 2gh \cos \gamma;$$
$$\overline{CP}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha - 2fh \cos \beta - 2gh \cos \gamma.$$

Da ciò si ricava

$$\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2.$$

Dunque *in ogni parallelepipedo la somma dei quadrati delle quattro diagonali è uguale alla somma dei quadrati delle dodici costole*. Questo Teorema notabile è analogo a quello, che ha luogo nel parallelogrammo *, e poteva dedursi immediatamente da quest'ultimo. Poichè, per mezzo dei parallelogrammi SCTP, ABMN si ha

* 14,3 cor.

$$\overline{ST}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{SC}^2 + 2\overline{SP}^2$$
$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AB}^2.$$

Sommando queste due equazioni, e osservando che abbiamo $SC = BM$ e $\overline{SP}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{SA}^2 + 2\,\overline{SB}^2$, verrà

$$\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4\,\overline{SA}^2 + 4\,\overline{SB}^2 + 4\,\overline{SC}^2.$$

PROBLEMA VI.

Essendo date le tre costole, che terminano ad un medesimo vertice d'una piramide triangolare, ed i tre angoli, che queste costole fanno tra loro, trovar la solidità della piramide stessa.

Fig. 7. Sia SABC la piramide triangolare proposta, nella quale si conoscono le costole $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$, e gli angoli contenuti $ASB = \alpha$, $ASC = \beta$, $BSC = \gamma$. Se sopra le costole SA, SB, SC, date di grandezza, e di posizione, si descrive il paralellepipedo ST, la piramide, ch'è il terzo del prisma triangolare BSANMC, sarà il sesto del paralellepipedo ST. Dunque, chiamando P la solidità della piramide, si avrà, secondo il Prob. VI,

$$P = \tfrac{1}{6} fgh \sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)},$$

ovvero

$$P = \tfrac{1}{3} fgh \sqrt{\left[\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right]}.$$

PROBLEMA VII.

Essendo dati i sei lati o costole d'una piramide triangolare, trovar la sua solidità.

Se si conservano le medesime denominazioni che nel precedente Teorema, e si faccia di più $BC = f'$, $CA = g'$, $BA = h'$, si avrà $\cos\alpha = \frac{f^2 + g^2 - h'^2}{2fg}$,

$\cos \beta = \frac{f^2+h^2-g'^2}{2fh}$, $\cos \gamma = \frac{g^2+h^2-f'^2}{2gh}$. Sostituendo questi valori nella formula già trovata, e facendo per abbreviazione

$$g^2+h^2-f'^2=F, f^2+h^2-g'^2=G, f^2+g^2-h'^2=H,$$

si avrà la solidità dimandata

$$P=\tfrac{1}{12}\sqrt{(4f^2g^2h^2-f^2F^2-g^2G^2-h^2H^2+FGH)}.$$

Nell'applicazione di queste formule si osserverà che f', g', h' indicano i lati d'una medesima faccia o base e f, g, h gli altri tre lati o costole, che terminano al vertice, essendo la lor disposizione tale che f è opposto a f', g a g', e h a h'.

Scolio. Sia A la somma dei quattro triangoli, che compongono la superficie della piramide; sia r il raggio della sfera iscritta; è facile vedere che si ha $P=A\times\frac{1}{3}r$; perchè si può concepir la piramide decomposta in quattr' altre, che avesser per vertice comune il centro della sfera, e per basi le differenti facce della piramide. Si ha dunque il raggio della sfera iscritta $r=\frac{3P}{A}$.

PROBLEMA VIII.

Poste le medesime cose che nel Problema VI. trovare il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

Sia M il centro del circolo circoscritto al triangolo SAB; MO la perpendicolare condotta dal punto M sul piano SAB; sia parimente N il centro del circolo circoscritto al triangolo SAC, e NO la perpendicolare alzata dal punto N sopra il piano SAC. Queste due perpendicolari situate in un medesimo piano MDN perpendicolare a SA s'incontreranno in un punto O, **Fig. 8.**

che sarà il centro della sfera circoscritta; perchè il punto O, come appartenente alla perpendicolare MO, è egualmente distante dai tre punti S, B, A; e questo medesimo punto, come appartenente alla perpendicolare NO, è egualmente distante dai tre punti S, A, C; dunque esso è egualmente distante dai quattro punti S, A, B, C.

Si può immaginare che il punto M sia determinato nel piano SAB per mezzo del quadrilatero SDMH, di cui i due angoli D, e H sono retti, e ove si ha $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$, e $ASB = \alpha$. Dunque si avrà (secondo il Problema III.) $DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; similmente avremo $DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f\cos6}{\operatorname{sen}6}$.

Si chiami D l'angolo MDN, che misura l'inclinazione dei due piani SAB, SAC; nel triangolo sferico, di cui α, 6, γ sono i lati, D sarà l'angolo opposto al lato γ, e così si avrà $\cos D = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos6}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}6}$, di modo che l'angolo D può esser supposto cognito.

Ciò premesso, nel quadrilatero OMDN, di cui i due angoli M, e N son retti, e di cui si conoscono i due lati MD, DN, e l'angolo contenuto $MDN = D$, si avrà per il Problema III, il quadrato della diagonale $\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DM}^2 + \overline{DN}^2 - 2\,DM \times DN\cos D}{\operatorname{sen}^2 D}$. Dipiù nel triangolo OSD rettangolo in D si avrà $\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$: questo è il valor del quadrato del raggio della sfera circoscritta.

Se si fa la sostituzione de' valori di DM, DN, ed in seguito quella de' valori di cos D, e sen D, affine d' avere immediatamente l'espressione del raggio SO per mezzo dei dati del Problema VI, si troverà per ultimo resultato $SO = \frac{1}{2} \sqrt{}$

$$\left\{ \frac{f^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + g^2 \operatorname{sen}^2 \beta + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2fg(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) - 2fh(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2gh(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)}{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \right\}$$

NOTA VI.

Sopra la più corta distanza di due rette non situate nel medesimo piano.

Sieno AB, CD, due rette non poste nel medesimo piano, rispetto alle quali si tratta di trovar la più corta distanza. Fig. 9.

Fate passar per AB due piani perpendicolari tra loro, che incontrino CD uno in C, e l'altro in D; dai punti C, e D abbassate CA, e DB perpendicolari sopra AB; nel piano ABD conducete DE paralella, ed AE perpendicolare a BA, in virtù di che formerassi il rettangolo ABDE; nel piano CAE tirate CE, e conducete AI perpendicolare a CE; finalmente nel piano CDE conducete IK paralella a DE fino all'incontro di CD in K; fate AL=IK, e tirate KL: dico 1.° che la retta KL è perpendicolare ad un tempo alle due rette AB, CD; 2.° che questa medesima retta KL è la più corta d'ogni altra, che unisca due punti delle linee AB, CD, e che la stessa KL, o la sua eguale AI, è perciò la più corta distanza cercata.

Infatti 1.° le tre rette AB, AC, AE essendo perpendicolari tra loro, una di esse AB è perpendicolare al piano dell'altre due; dunque AB

è perpendicolare ad AI: d'altronde KI è paralella a DE, e DE ad AB; dunque KI è paralella ad AB: e poichè si è fatto AL=IK, ne segue che la Figura AIKL è un rettangolo. Ciò posto, l'angolo AIK è retto, come pure AIC; dunque la retta AI è perpendicolare al piano KIC, ovvero CDE; dunque la sua paralella KL è perpendicolare al medesimo piano CDE, e per conseguenza è perpendicolare a CD. Dunque 1.° la retta KL è perpendicolare ad un tempo alle due rette AB, CD.

2.° Sia M un punto qualunque della retta CD; se per questo punto si conduce MN paralella a DE, ovvero ad AB, la distanza del punto M dalla retta AB sarà eguale ad AN, poichè l'angolo BAN è retto. Ora, si ha AN > AI; dunque AI è la più corta distanza delle linee rette date AB, CD.

Sieno le perpendicolari $CA=a$, e $DB=AE=b$; s'avrà $CE=\sqrt{(a^2+b^2)}$; e perchè l'area del triangolo ACE si esprime egualmente per $\frac{1}{2}AC\times AE$, e per $\frac{1}{2}CE\times AI$, s'avrà $AI=\frac{AC\times EA}{CE}=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Questa è l'espressione della più corta distanza delle due linee date.

Se nel medesimo tempo si faccia la distanza $AB=c$, e si chiami A l'angolo contenuto tra le due linee date, vale a dire l'angolo CDE contenuto tra la linea CD, e una paralella DE alla linea AB, il triangolo rettangolo CDE in E darà

$$\cos CDE=\frac{DE}{CD}, \text{ ovvero } \cos A=\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}};$$

poichè si ha $\overline{CD}^2=\overline{CE}^2+\overline{ED}^2=a^2+b^2+c^2$. Da

ciò altresì proverà $\text{sen}\, A = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$; e $\cot A = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

NOTA VII.

Sopra i Polièdri simmetrici.

Per maggior semplicità abbiamo supposto nella definizione 16. Libro VI. che il piano, al quale son riportati i Poliédri simmetrici, sia il pian d'una faccia. Si poteva supporre che questo piano fosse un piano qualunque, ed allora la definizione diventava più generale, senza che vi fosse da cangiar nulla nella Dimostrazione della Proposizione II, in cui s'è stabilita la relazione scambievole de' due Poliédri. Si può ancora acquistare un'idea giustissima della maniera d'esistere di questi due Solidi, riguardandone uno de' due come l'immagin dell'altro formata in uno specchio piano, il quale starebbe in luogo del piano, di cui abbiamo parlato.

NOTA VIII.

Sulla Proposizione XXV. del Libro VII.

Questo Teorema, ch' Eulero ha dimostrato il primo nelle *Memorie di Pietroburgo* dell' anno 1758, offre più conseguenze, le quali meritano d'essere sviluppate.

1.° Sia *a* il numero dei triangoli, *b* il numero dei quadrilateri, *c* il numero dei pentagoni ec., che compongono la superficie d' un

poliédro; il numero total delle facce sarà dunque $a+b+c+d+$ ec, e il numero totale de' loro lati sarà $3a+4b+5c+6d$ ec. Quest' ultimo numero è doppio di quello delle costole, poichè la medesima costola appartiene a due facce; così si avrà

$$H=a+b+c+d+\text{ec.};$$
$$2A=3a+4b+5c+6d+\text{ec.}$$

E poichè, secondo il Teorema, di cui si tratta, $S+H=A+2$, avremo

$$2S=4+a+2b+3c+4d+\text{ec.}$$

La prima osservazione, che ricaviamo da questi valori, si è che il numero delle facce di numero impari di lati $a+c+e+$ ec. è sempre pari.

Si può far per abbreviazione $\omega=b+2c+3d+$ ec; ed allora si avrà

$$A=\tfrac{1}{2}H+\tfrac{1}{2}\omega,$$
$$S=2+\tfrac{1}{2}H+\tfrac{1}{2}\omega.$$

Così in ogni poliedro avrassi sempre $A>\frac{1}{2}H$, e $S>2+\frac{1}{2}H$, ove bisogna osservare che il segno $>$ non esclude l'eguaglianza, attesochè si potrebbe avere $\omega=0$.

Il numero di tutti gli angoli piani d'un poliédro è $2A$, quello degli angoli solidi è S, di modo che il numero medio degli angoli piani, che formano ciascun angolo solido, è $\dfrac{2A}{S}$.

Questo numero non può esser minore di 3, poichè son necessarj almeno tre angoli piani per formare un angolo solido; così deve aversi $2A>3S$, il segno $>$ non escludendo l'egualità. Se si pongono in vece di A, e S i loro valori in H, e ω, si avrà $3H+\omega>6+\frac{3}{2}H+\frac{3}{2}\omega$, ovvero $3H>12+\omega$. Rimettendo i valori di H, e ω in a, b, c, ec. ne resulterà

$$3a+2b+c>12+e+2f+3g+\text{ec.},$$

ove si vede che a, b, c non posson essere zero nel medesimo tempo, e parimente che non esiste alcun poliédro, di cui tutte le facce abbiano più di cinque lati.

Poichè si ha $H > 4 + \frac{1}{3}\omega$, la sostituzione nei valori di S, e di A darà $S > 4 + \frac{2}{3}\omega$, e $A > 6 + \omega$. Ma si ha ancora $\omega < 3H - 12$; e da ciò resulta $S < 2H - 4$, e $A < 3H - 6$, ove ci rammenteremo che i segni $>$, e $<$ non escludono l'eguaglianza. Questi limiti han luogo generalmente in tutti i poliédri.

2.° Supponghiamo $2A > 4S$, il che conviene a un' infinità di poliédri, e particolarmente a quelli, di cui tutti gli angoli solidi son formati da quattro angoli piani o più; si avrà in questo caso $H > 8 + \omega$, ovvero, facendo la sostituzione,

$$a > 8 + c + 2d + 3e + \text{ec.}$$

Dunque bisogna che il solido abbia almeno otto facce triangolari; il limite $H > 8 + \omega$ dà $S > 6 + \omega$, e $A > 12 + 2\omega$. Ma si ha nel medesimo tempo $\omega < H - 8$; laonde da ciò resulta $S < H - 2$, $A < 2H - 4$.

3.° Supponghiamo $2A > 5S$, ciò che abbraccia tra gli altri poliédri quelli, di cui tutti gli angoli solidi sono almen quintupli, e ne resulterà $H > 20 + 3\omega$, ovvero

$$a > 20 + 2b + 5c + 8d + \text{ec.},$$

e si avrà insieme $S > 12 + 2\omega$, e $A > 30 + 5\omega$. Finalmente dall' essere $\omega < \frac{1}{3}(H - 20)$ si ricavano i limiti $S < \frac{2}{3}(H - 2)$, $A < \frac{5}{3}(H - 2)$.

Non si può supporre $2A = 6S$, perchè si ha in generale $2A + 2\omega + 12 = 6S$; dunque non vi è alcun poliédro, di cui tutti gli angoli solidi sien formati da sei angoli piani, o più. Infatti il minor valore, che avrebbe ciascun angolo piano, l'un per l'altro, sarebbe quello

dell'angolo d'un triangolo equilatero, e sei di questi angoli farebbero quattro retti; il che è troppo grande per un angolo solido.

4.° Consideriamo un poliédro, di cui tutte le facce sieno triangolari, si avrà $\omega = 0$, il che darà $A = \frac{1}{2}H$, e $S = 2 + \frac{1}{2}H$. Supponiamo in oltre che tutti gli angoli solidi d'un poliédro sieno in parte quintupli, e in parte sestupli; sia p il numero degli angoli solidi quintupli, q quello dei sestupli; s'avrà $S = p + q$, e $2A = 5p + 6q$, il che da $6S - 2A = p$: ma abbiamo d'altronde $A = \frac{1}{2}H$, e $S = 2 + \frac{1}{2}H$; dunque $p = 6S - 2A = 12$. Dunque *se un poliédro ha tutte le sue facce triangolari, ed i suoi angoli solidi sieno in parte quintupli, e in parte sestupli, gli angoli solidi quintupli saranno sempre in numero di* 12. I sestupli potranno essere di numero qualunque: così, lasciando q inteterminato, si avrà in tutti questi solidi $S = 12 + q$, $H = 2c + 2q$, $A = 3c + 3q$.

Termineremo queste applicazioni con la ricerca del numero delle condizioni, o dati necessarj per determinare un poliédro; Problema interessante, il quale non sembra che sia stato ancor risoluto.

Supponiamo primieramente che il poliêdro sia *d'una specie determinata*, o vale a dire che si conosca il numero delle sue facce, il numero de' loro lati individualmente, e la loro disposizione gli uni riguardo agli altri. Si conoscon dunque i numeri H, S, A, come pure a, b, c, d, ec.: d'altro non si tratta fuorchè d'avere il numero dei dati effettivi, linee, o angoli, per mezzo de' quali il poliédro possa esser costrutto, e determinato.

Consideriamo una delle facce del poliédro, che noi prenderemo per base. Sia n il numero dei suoi lati; bisogneranno $2n-3$ dati per determinar questa base. Gli angoli solidi fuor della base

sono in numero di $S-n$; il vertice di ciascun angolo esige tre dati, per la sua determinazione; così la posizione di $S-n$ vertici esigerà $3S-3n$ dati, ai quali aggiungendo i $2n-3$ della base, s'avranno in tutto $3S-n-3$. Ma questo numero è in generale troppo grande, e debb'esser diminuito del numero delle condizioni necessarie perchè i vertici, che corrispondono a una medesima faccia, sieno in un medesimo piano. Abbiamo chiamato n il numero de' lati della base, e si chiamino parimente n', n'', ec. i numeri de' lati dell'altre facce. Tre punti determinano un piano; così ciò, che si troverà di più di 3 in ciascun de' numeri n', n'', ec., darà altrettante condizioni perchè i differenti vertici sieno situati nei piani delle facce, alle quali essi appartengono; ed il numero totale di queste condizioni sarà eguale alla serie $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+$ ec. Ma il numero de' termini di questa *serie* è $H-1$; d'altronde $n+n'+n''+$ec.$=2A$: dunque la somma de' termini della serie sarà $2A-n-3(H-1)$. Togliendo questa somma da $3S-n-3$, resterà $3S-2A+3H-6$; quantità, che a causa di $S+H=A+2$, si riduce ad A. Dunque *il numero de' dati necessarj per determinare un poliédro fra tutti quelli della medesima specie è eguale al numero della costole*.

Osserviamo frattanto che i dati, di cui si tratta, non deggion esser presi a caso fra le linee, e gli angoli, che costituiscono gli elementi del poliédro; poichè, non ostante che si avessero tante equazioni che incognite, potrebbe succedere che certe relazioni tra le quantità cognite rendessero il Problema indeterminato. Così sembrerebbe secondo il Teorema che abbiam trovato, che la conoscenza delle sole costole servisse generalmente per determinare un

poliédro; ma vi sono de' casi, ove questa conoscenza non è sufficiente. Per esempio, essendo dato un prisma non triangolare qualunque, si potrà formare un' infinità d' altri prismi, che abbiano delle costole eguali, e disposte nella stessa maniera. Poichè, allorquando la base ha più di tre lati, si può, conservando i lati, cangiare gli angoli, e dare ancora a questa base; un' infinità di forme diverse; si può cangiare ancora la posizion della costola longitudinale del prisma per rapporto al pian della base; finalmente si possono combinare questi due cangiamenti l' uno con l' altro, e ne resulterà sempre un prisma, le cui costole, o lati non avranno cangiato. Da ciò si vede che le sole costole non servono in questo caso per determinare il solido.

I dati, che convien prendere per determinare un solido, son quelli, che non lasciano alcuna indeterminazione, e non danno assolutamente che una soluzion sola. E in primo luogo la base ABCDE sarà determinata tra tutte l' altre maniere se si conosce il lato AB con gli angoli adiacenti BAC, ABC, per il punto C; gli angoli BAD, ABD, per il punto D; e così degli altri. Sia in seguito M un punto, di cui bisogni determinare la posizione fuori del pian della base; questo punto sarà determinato se nell' immaginarsi la piramide MABC, o solamente il piano MAB, si conosceranno gli angoli MAB, ABM, e l' inclinazione del piano MAB sopra la base ABC. Se si determina, per mezzo di tre simili dati, la posizione di ciascuno dei vertici del poliédro fuori del pian della base, è chiaro che il poliédro sarà assolutamente determinato in una maniera unica; di modo che due poliédri costrutti coi medesimi dati saranno necessariamente eguali; sarebbero per altro simmetrici l' uno dell' altro

Fig. 5.

se fossero stati costrutti uno al di sopra, ed uno al di sotto del pian della base.

Non è sempre necessario d'aver tre dati per determinare ciascun angolo solido d'un poliédro; perchè, se il punto M dee trovarsi sopra un piano già determinato, di cui l'intersezion colla base sia FG, servirà dopo aver preso FG a piacimento conoscere gli angoli MGF, MFG; così bisognerà un dato di meno. Se il punto M dee trovarsi sopra due piani già determinati, o sulla loro intersezione comune MK, che incontra il piano ABC in K, si conoscerà il lato AK, l'angolo AKM, e l'inclinazione del piano AKM sulla base; servirà dunque d'avere per nuovo dato l'angolo MAK. Dunque il numero de'dati necessarj per determinare un poliédro assolutamente, e d'una maniera unica, si ridurrà sempre al numero delle sue costole A.

Il lato AB, ed un numero $A-1$ d'angoli dati determinano un poliédro; un altro lato a piacimento, ed i medesimi angoli determineranno un poliédro simile. Da ciò ne segue che *il numero delle condizioni necessarie perchè due poliédri della medesima specie sien simili, è eguale al numero delle costole meno uno.*

Il Problema, che abbiam risoluto, sarebbe molto più semplice se non si conoscesse la specie del poliédro, ma solamente il numero de' suoi angoli solidi S. Determinate allora tre vertici a piacimento per mezzo d'un triangolo, ove saranno tre dati; questo triangolo sarà riguardato come la base del solido; in seguito i vertici fuori di questa base saranno in numero di $S-3$; e la determinazion di ciascun esigendo tre dati, è chiaro che il numero totale dei *dati* necessarj per determinare il poliédro sarà $3+3(S-3)$, ovvero $3S-6$.

Bisogneranno dunque 3S — 7 *condizioni* perchè due poliêdri, che hanno un egual numero S di angoli solidi, sieno simili tra di loro.

NOTA IX.

Sopra i Poliêdri Regolari. (Vedete l'Appendice al Libro VII.)

Nella Proposizione II. di questo Appendice ci siamo applicati a dimostrar l'esistenza dei cinque poliédri regolari, e vale a dire la possibilità di disporre un certo numero di piani eguali di tal maniera che ne risulti un solido uniforme in tutta la sua estensione. Ci è sembrato che in altre Opere queste disposizioni sieno state supposte esistenti senza renderne gran ragione, ovvero non sian dimostrate se non che, come ha fatto *Euclide*, con delle Figure complicate, e difficili a intendersi.

I Problemi, uno cioè di determinare l'inclinazion di due facce adiacenti d'un poliédro, e quello di determinare i raggi delle sfere iscritta, e circoscritta, son ridotti nei Problemi III, e IV. a semplicissime costruzioni; ma non sarà inutile d'applicare a questi Problemi medesimi il calcolo trigonometrico, che darà d'altronde delle nuove Proposizioni.

Fig. 10. Sieno a, b, c i tre angoli piani, che compongono l'angolo solido O, e sia proposto di trovare l'inclinazione dei piani ove sono gli angoli a, e b; si descriverà col centro in O il triangolo sferico ABC, nel quale conosconsi i tre lati $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, e bisognerà trovar l'angolo C contenuto tra i lati a, e b. Ora, per le formule cognite, si ha $\cos C=\frac{\cos c-\cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$.

Queste formule applicate ai cinque poliédri regolari ci faranno conoscere l' inclinazion di due facce adiacenti in ciascuno di questi solidi.

Fig. 11. Nel Tetraédro i tre angoli piani, che compongono l'angolo solido S, son angoli di triangoli equilateri: sia dunque la mezza-circonferenza, ovvero l'arco di $200^\circ = \pi$; s' avrà $a = b = c = \frac{1}{3}\pi$;

dunque $\cos C = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\text{sen}^2 a} = \frac{\cos a(1 - \cos a)}{1 - \cos^2 a} = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$. Ma si sa che $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$; dunque $\cos C = \frac{1}{3}$.

Fig. 12. Nell' Esaédro, o Cubo, i tre angoli piani, che forman l'angolo solido A, son angoli retti; così abbiamo $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, e $\cos a = 0$; dunque $\cos C = 0$. Dunque l'angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

Fig. 13. Nell'Ottaédro, se si fa $a = DAS = \frac{1}{3}\pi$, $b = DAT = \frac{1}{3}\pi$, $c = TAS = \frac{1}{2}\pi$, si avrà $\cos C = \frac{\cos \frac{1}{2}\pi - \cos^2 \frac{1}{3}\pi}{\text{sen}^2 \frac{1}{3}\pi}$.

Ora, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\text{sen} \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dunque $\cos C = -\frac{1}{3}$. Da ciò si vede che l'inclinazion delle facce dell' Ottaédro, e quella delle facce del Tetraédro son supplemento l' una dell' altra.

Nel Dodecaédro un angolo solido è formato da tre angoli piani, eguali ciascuno all'angolo d'un pentagono regolare; così, facendo $a = b = c = \frac{3}{5}\pi$, s' avrà $\cos C = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$; ma $\cos \frac{3}{5}\pi = -\text{sen} \frac{1}{10}\pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$: dunque $\cos C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sen}\, C = \frac{2}{\sqrt{5}}$, e $\text{tang}\, C = -2$.

Fig. 15. Nell' Icosaédro bisogna far $c = C'B'D' = \frac{3}{5}\pi$, $a = b = C'B'A' = \frac{1}{3}\pi$, e s'avrà $\cos C = \frac{\cos\frac{3}{5}\pi - \cos^2\frac{1}{3}\pi}{\text{sen}^2\frac{1}{3}\pi} = \frac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; dunque $\text{sen}\, C = \frac{2}{3}$. Tali sono l'espressioni semplicissime, con le quali determinasi l'inclinazion di due facce nei cinque poliédri regolari. Ma osserveremo che si sarebbero tutte potute comprendere in una sola e medesima formula.

Fig. 16. Difatti sia n il numero dei lati di ciascuna faccia, m il numero degli angoli piani, che si riuniscono in ciascun angolo solido; se dal centro O, e con un raggio $= 1$ descrivasi una superficie sferica, che incontri in p, q, r le linee rette OA, OC, OD, s'avrà un triangolo sferico pqr, nel quale si conoscono l'angolo retto r, l'angolo $p = \frac{\pi}{m}$, e l'angolo $q = \frac{\pi}{n}$; si avrà dunque, per le formule cognite, $\cos qr = \frac{\cos p}{\text{sen}\, q}$. Ma $\cos qr = \cos COD = \text{sen}\, CDO = \text{sen}\, \frac{1}{2}C$, C indicando l'angolo CDE: dunque $\text{sen}\,\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\text{sen}\frac{\pi}{n}}$; formula generale, che applicata successivamente ai cinque poliédri darà i medesimi valori di $\cos C$, o di $1 - 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C$, che con altro metodo abbiam trovati. Per questo fine bisogna sostituir in ciascun caso i valori di m, e n, cioè,

	Tetraédro,	Esaédro,	Ottaédro,	Dodecaédro,	Icosaédro
$m =$	3,	3,	4,	3,	5
$n =$	3,	4,	3,	5,	3.

Il medesimo triangolo sferico pqr, dal quale

abbiamo dedotta l' inclinazion di due facce adiacenti, dà ancora $\cos p\,q = \cot p \cot q$, ovvero $\frac{CO}{OA} = \cot\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{n}$. Dunque, se si chiami R il raggio della sfera circoscritta al poliédro, e r il raggio della sfera nel medesimo iscritta, si avrà $\frac{R}{r} = \tang\frac{\pi}{m}\ \tang\frac{\pi}{n}$; d'altronde, facendo il lato $AB = a$, si ha $CA = \frac{\frac{1}{2}a}{\text{sen}\frac{\pi}{n}}$, e per conseguenza $R^2 = r^2 + \frac{\frac{1}{4}a^2}{\text{sen}^2\frac{\pi}{n}}$. Queste due equazioni, daranno per ciascun poliédro i valori dei raggi R, e r delle sfere circoscritta, ed iscritta. Abbiamo pure, supponendo C cognito, $r = \frac{1}{2}a.\cot\frac{\pi}{n}\tang\frac{1}{2}C$, e $R = \frac{1}{2}a\tang\frac{\pi}{m}\tang\frac{1}{2}C$.

Nel dodecaédro, ed icosaédro si vede chiaro che il rapporto $\frac{R}{r}$ ha il valore medesimo $\tang\frac{\pi}{3}\tang\frac{\pi}{5}$. Dunque, se R è lo stesso per ambedue, r sarà pure lo stesso, e vale a dire che, se questi due solidi sono iscritti in una medesima sfera, saranno ancora circoscritti alla medesima sfera, e reciprocamente. La medesima proprietà ha luogo tra l'esaédro, e l'ottaédro, poichè il valore $\frac{R}{r}$ sì per l'uno, come per l'altro è $\tang\frac{\pi}{3}.\tang\frac{\pi}{4}$.

S' osservi che i poliédri regolari non sono i solidi soli, che sien formati da dei poligoni regolari eguali; poichè, se si addossano per una faccia comune due tetraédri regolari eguali, ne resulterà un solido formato da sei triangoli eguali, e tutti equilateri. Si potrebbe formare ancora un altro solido con dieci triangoli eguali, ed equilateri. Ma i poliédri regolari son però i soli, che abbiano a un tempo tutti gli angoli solidi eguali.

NOTA X.

Sull' area del Triangolo sferico.

Sia 1 il raggio della sfera, π la mezza-circonferenza d'un circolo; sieno a, b, c i tre lati d'un triangolo sferico; A, B, C gli archi di gran circolo, che misurano gli angoli opposti. Sia $A+B+C-\pi=S$: secondo ciò, che è stato dimostrato nel testo *, l'area del triangolo sferico è uguale all'arco S moltiplicato pel raggio, il qual prodotto è parimente rappresentato da S. Ora, per le analogie di *Neper*, si ha

* 23.7

$$\tang \frac{A+B}{2} : \cot \frac{C}{2} :: \cos \frac{a-b}{2} : \cos \frac{a+b}{2};$$

da questa proporzione ricavando il valore di tang $\frac{1}{2}(A+B)$, se ne dedurrà facilmente quello di tang $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=-\cot \frac{1}{2}S$, e s'avrà pure

$$\cot \tfrac{1}{2}S=\frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C};$$

formula semplicissima, che può servire a calcolar l'area d'un triangolo sferico quando si conoscon due lati a, b, e l'angolo contenuto C. Si possono ancora dedurre più conseguenze notabili.

1.° Se l'angolo C è costante, come pure il prodotto $\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}$, l'area del triangolo sferico, rappresentata da S, resterà anch'essa costante. Dunque due triangoli CAB, CDE, che hanno un angolo eguale C, saranno equivalenti, se s'avrà $\tang\frac{1}{2}CA : \tang\frac{1}{2}CD :: \tang\frac{1}{2}CE : \tang\frac{1}{2}CB$, e vale a dire, se le tangenti delle metà dei lati, che contengono l'angolo eguale, sien reciprocamente proporzionali. Fig. 17.

2.° Per fare sul lato dato CD, e col medesimo angolo C, un triangolo CDE equivalente al triangolo dato CAB, bisogna determinare CE mediante la proporzione

$$\tang\tfrac{1}{2}CD : \tang\tfrac{1}{2}CA :: \tang\tfrac{1}{2}CB : \tang\tfrac{1}{2}CE.$$

3.° Per costruire con l'angolo al vertice C un triangolo isoscele DCE equivalente al triangolo dato CAB, bisogna prendere $\tang\frac{1}{2}CD$, o $\tang\frac{1}{2}CE$ media proporzionale tra $\tang\frac{1}{2}CA$, e $\tang\frac{1}{2}CB$.

4.° La medesima formula $\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen} C}$ può condurre a dimostrare in una maniera semplicissima la Proposizione XXVI. del Libro VII, cioè, che di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati *a*, e *b*, il maggiore è quello, nel quale l'angolo C contenuto tra i lati dati sia eguale alla somma degli altri due A, e B.

Col raggio $OZ = 1$ descrivete la mezza-circonferenza VMZ; fate l'arco $ZX = C$, e dall'altra parte del centro prendete $OP = \cot\frac{1}{2}a \cot\frac{1}{2}b$; finalmente tirate PX, ed abbassate XY perpendicolare sopra PZ. Fig. 18.

Nel triangolo rettangolo PXY si ha $\cot P = \frac{PY}{XY} = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen} C}$; dunque $P = \frac{1}{2}S$; dunque la superficie S sarà un *maximum* se lo sarà

l'angolo P. Ora, è evidente che, se si conduca PM tangente della circonferenza, l'angolo MPO sarà il *maximum* degli angoli P, ed allora si avrà $MPO = MOZ - \frac{1}{2}\pi$. Dunque il triangolo sferico, formato con due lati dati, sarà un *maximum* se si avrà $\frac{1}{2}S = C - \frac{1}{2}\pi$, ovvero $C = A + B$; il che si accorda con la Proposizione citata.

Si vede nel medesimo tempo in virtù di questa costruzione che non vi sarebbe luogo al *maximum* se il punto P fosse dentro del circolo, e vale a dire se s'avesse $\cot\frac{1}{2}a \cot\frac{1}{2}b < 1$: condizione, dalla quale ricavasi in seguito $\cot\frac{1}{2}a < \tang\frac{1}{2}b$, $\tang(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}a) < \tang\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$, e finalmente $\pi < a + b$; il che concorda pur collo Scolio della medesima Proposizione.

PROBLEMA I.

Trovare la superficie d'un Triangolo sferico per mezzo de' suoi tre lati.

A questo fine bisognerà nella formula

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

sostituire i valori di sen C, e cos C espressi per a, b, c: ora, si ha $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$, e $\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b = \frac{1+\cos a}{\operatorname{sen} a}\cdot\frac{1+\cos c}{\operatorname{sen} b}$: da ciò resulta

$$\cos C + \cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Oltrediciò il valore di cos C dà

$$1+\cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

$$1-\cos C=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Moltiplicando tra loro queste due quantità, ed estraendo la radice quadra dal loro prodotto, si avrà

$$\operatorname{sen} C=\frac{2\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Dunque alla fine

$$\cot\tfrac{1}{2}S=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+a-c}{2}\right)}}.$$

Questa formula risolve il Problema proposto; ma si può arrivare eziandio ad un resultato più semplice.

Perciò riprendiamo la formula

$$\cot\tfrac{1}{2}S=\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C},$$

e ricaveremo subito $1+\cot^2\frac{1}{2}S$, ovvero

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}S}=\frac{\cot^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b+2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C+1}{\operatorname{sen}^2 C}.$$

Ora, il valore di $\cos C$ dà $2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}$; mettendo nel numeratore in luogo di $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$ i loro valori $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b$, e riducendo, si avrà

$$2\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}-2.$$

D'altronde abbiamo

$$\cot^2\tfrac{1}{2}a\cot^2\tfrac{1}{2}b=\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}.\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}=$$

$\frac{1-\text{sen}^2\frac{1}{2}a-\text{sen}^2\frac{1}{2}b}{\text{sen}^2\frac{1}{2}a\,\text{sen}^2\frac{1}{2}b}+1$. Dnnque, sostituendo questi valori, otterremo $\frac{1}{\text{sen}^2\frac{1}{2}S}=\frac{1-\text{sen}^2\frac{1}{2}c}{\text{sen}^2\frac{1}{2}a\,\text{sen}^2 b\,\text{sen}^2 C}$;

il che somministra $\text{sen}\,\frac{1}{2}S=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b\,\text{sen}\,C}{\cos\frac{1}{2}c}$,

e rimettendo il valore di sen C, si ha $\text{sen}\,\frac{1}{2}S=$

$$\frac{\sqrt{\left(\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

formula comoda per il calcolo logaritmico.

Se si moltiplica questa per il valore di $\cot\frac{1}{2}S$, resulterà tosto

$$\cos\tfrac{1}{2}S=\frac{1+\cos a+\cos b\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

nuova formula, che ha il vantaggio d'esser tutta composta di termini razionali.

Da questa ricavasi ancora $\frac{1-\cos\frac{1}{2}S}{\text{sen}\,\frac{1}{2}S}$, o $\tan\frac{1}{4}S=$

$$\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Ora il numeratore di questa espressione può esser messo sotto la forma

$(1-\cos^2\frac{1}{2}a)(1-\cos^2\frac{1}{2}b)-(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c)^2$, ed allora si decompone in due fattori, cioè, $\text{sen}\frac{1}{2}a\,\text{sen}\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c$, e $\text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c$; questi riduconsi ulteriormente, il primo cioè a $\cos(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)-\cos\frac{1}{2}c=$ $2\,\text{sen}\frac{a+c-b}{4}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{4}$, il secondo a $\cos\frac{1}{2}c-$

$\cos(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)=2\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b+c}{4}\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b-c}{4}$. Dunque $\mathrm{tang}\frac{1}{4}S=$ . . . . : . . . .

$$\frac{4\,\mathrm{sen}\frac{a+b+c}{4}\,\mathrm{sen}\frac{a+b-c}{4}\,\mathrm{sen}\frac{a+c-b}{4}\,\mathrm{sen}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\mathrm{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\mathrm{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\mathrm{sen}\frac{a+c-b}{2}\,\mathrm{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Ma si ha $\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\mathrm{sen}p}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}p}{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p}\right)}=\sqrt{(\frac{1}{2}\mathrm{tang}\frac{1}{2}p)}$;

Dunque in ultimo $\mathrm{tang}\frac{1}{4}S=$. . . . .

$$\sqrt{\left(\mathrm{tang}\frac{a+b+c}{4}\,\mathrm{tang}\frac{a+b-c}{4}\,\mathrm{tang}\frac{a+c-b}{4}\,\mathrm{tang}\frac{b+c-a}{4}\right)}.$$

Questa elegantissima formula è dovuta a Simone Lhuillier.

PROBLEMA II.

Essendo dati i tre lati BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$, *determinare la posizione del punto* I, *polo del circolo circoscritto al Triangolo* ABC. Fig. 19.

Sia l'angolo ACI$=x$, e l'arco AI$=$CI$=$BI$=\varphi$, nei triangoli CAI, CBI si avrà, per le formule cognite,

$$\cos x=\frac{\cos\varphi-\cos b\cos\varphi}{\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,\varphi}=\frac{1-\cos b}{\mathrm{sen}\,b}\cot\varphi=\frac{\mathrm{sen}\,b}{1+\cos b}\cot\varphi,$$

$\cos(C-x)=\frac{1-\cos a}{\mathrm{sen}\,a}\cot\varphi$. Dunque $\frac{\cos(C-x)}{\cos x}$, ovvero

$\cos C+\mathrm{sen}\,C\,\mathrm{tang}\,x=\frac{(1+\cos b)(1-\cos a)}{\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b}$; sostituendo in quest'equazione i valori di cos C, e sen C espressi per a, b, c, e facendo, per abbreviare, $M=\sqrt{(1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c)}$, se ne dedurrà $\mathrm{tang}\,x=\frac{1+\cos b-\cos c-\cos a}{M}$; for-

mula, che determina l'angolo ACI. Si può osservar che a motivo dei triangoli isosceli ACI, ABI, BCI si ha $ACI = \frac{1}{2}(C + A - B)$; avrebbesi parimente $BCI = \frac{1}{2}(B + C - A)$, $BAI = \frac{1}{2}(A + B - C)$. Da ciò risultano queste formule riguardevoli

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(B + C - A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{M},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{M},$$

alle quali si può aggiungere quella, che dà $\cot \frac{1}{2} S$, e può mettersi sotto la forma

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-1 - \cos a - \cos b - \cos c}{M}.$$

Il valor di tangente x, che abbiamo trovato, dà

$$1 + \tang^2 x, \text{ovvero } \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2(1 + \cos b)(1 - \cos c)(1 - \cos a)}{M^2}$$

$$= \frac{16 \cos^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{M^2};$$

dunque $\frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{M}$. Ma dalla equazione $\cos x = \frac{1 - \cos b}{\operatorname{sen} b} \cot \varphi = \tang \frac{1}{2} b \cot \varphi$ si ricava $\tang \varphi = \frac{\tang \frac{1}{2} b}{\cos x}$; dunque $\tang \varphi = \frac{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{M} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2} \operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2} \operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

PROBLEMA III.

Determinare sulla superficie della Sfera la linea, sulla quale son situati tutti i vertici dei Triangoli della medesima base, e della medesima superficie.

Sia ABC uno dei triangoli sferici, di cui la base comune è $AB = c$, e la superficie data $A + B + C - \pi = S$. Sia IPK una perpendicolare indefinita alzata sopra il mezzo di AB; avendo preso IP eguale al quadrante, P sarà il polo dell' arco AB, e l'arco PCD condotto pei punti P, C sarà perpendicolare sopra AB. Sia $ID = p$, $CD = q$; i triangoli rettangoli ACD, BCD, nei quali si ha $AC = b$, $BC = a$, $AD = p + \frac{1}{2}c$, $BD = p - \frac{1}{2}c$, daranno $\cos a = \cos q \cos (p - \frac{1}{2}c)$, $\cos b = \cos q \cos (p + \frac{1}{2}c)$. Ma si è trovato di sopra

Fig. 20.

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C};$$

sostituendo in questa formula i valori $\cos a + \cos b = 2 \cos q \cos p \cos \frac{1}{2} c$, $1 - \cos c = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c$, $\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c \operatorname{sen} B$, s'avrà

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} B}.$$

D'altronde nel triangolo rettangolo BCD si ha ancora $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} q$; dunque

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} q},$$

ovvero $\cos p \cos q = \cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} q - \cos \frac{1}{2} c$. Questa è la relazione tra p, e q, che dee determinare la linea, sulla quale son situati tutti i punti C.

Avendo prolungato IP d'una lunghezza $PK = x$, tirate KC, e sia $KC = y$; nel triangolo PKC, ove si ha $PC = \frac{1}{2}\pi - q$, e l'angolo $KPC = \pi - p$.

il lato KC si troverà mediante la formula $\cos KC = \cos KPC \operatorname{sen} PK \operatorname{sen} PC + \cos PK \cos PC$, ovvero

$$\cos y = \operatorname{sen} q \cos x - \operatorname{sen} x \cos q \cos p;$$

nella quale sostituendo, in vece di $\cos q \cos p$, il suo valore $\cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} q - \cos \frac{1}{2} c$, si avrà
$\cos y = \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{2} c + \operatorname{sen} q (\cos x - \operatorname{sen} x \cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c)$.
Da ciò si fa chiaro che, se si prenda $\cos x - \operatorname{sen} x \cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c = 0$, ovvero $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$, avrassi $\cos y = \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{2} c$, e così il valore di y verrà a diventare costante.

Dunque, se dopo d' aver condotto IP perpendicolare sul mezzo della base AB, si prenda al di là del polo la parte PK tale che $\cot PK = \cot \frac{1}{2} S \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$, tutti i vertici dei triangoli, che abbiano la medesima base c, e la medesima superficie S, saranno situati sul piccol circolo descritto dal punto K, come polo, a una distanza KC tale che $\cos KC = \operatorname{sen} PK \cos \frac{1}{2} c$.

Questo bel Teorema è dovuto a Lexell. (Vedete il Tomo V, Parte 1. dei *Nova Acta Petropolitana*.)

NOTA XI.

Sulla Proposizione III. del Libro VIII.

Questa Proposizione può esser dimostrata più rigorosamente riportandola ai Lemmi preliminari nella maniera seguente.

Dico primieramente che la superficie convessa terminata dalle costole, o spigoli AF, BG, e degli archi A u B, F x G non può essere minor del rettangolo ABGF, ch' è porzione corrispondente della superficie del prisma iscritto. (Fig. 21.)

Infatti, sia S la superficie convessa, di cui si tratta, e sia, se è possibile, il rettangolo ABGF,

ovvero $AB \times AF = S \times M$, M essendo una quantità positiva.

Prolungate l'altezza AF del prisma, e del cilindro fino ad una lunghezza AF' eguale a n volte AF, n essendo un numero intero qualunque. Se si prolunghin così nel medesimo tempo il cilindro ed il prisma, è chiaro che la superficie convessa S', compresa tra le costole AF', BG', conterrà n volte la superficie S di maniera che si avrà $S' = nS$; e perchè $n \times AF = AF'$, si avrà $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Ora n essendo un numero intero qualunque, e M una superficie data, si può prendere n in modo che si abbia nM maggiore del doppio del segmento AuB, poichè basta per questo di far $n > \frac{2AuB}{M}$; dunque allora il rettangolo $AB \times AF'$, ovvero la superficie piana $ABG'F'$ sarebbe maggiore della superficie circondante, composta della superficie convessa S', e dei due segmenti circolari eguali AuB, $F'xG'$, Ma, al contrario, la seconda superficie è maggior della prima, in virtù del primo Lemma preliminare; dunque 1° non si può avere $S < ABGF$.

Dico in secondo luogo che la medesima superficie convessa S non può esser eguale a quella del rettangolo ABGF. Poichè supponiamo, s'è possibile, che prendendo $AE = AB$, la superficie convessa AMK sia eguale al rettangolo AFKE; per un punto qualunque M dell'arco AME conducete le corde AM, ME, ed alzate MN perpendicolare sul pian della base. I tre rettangoli AMNF, MEKN, AEKF, avendo la medesima altezza, stanno tra loro come le respettive basi AM, ME, AE. Ora si ha $AM + ME > AE$; dunque la somma dei rettangoli AMNF, MEKN è maggior del rettangolo AFKE. Quest'ultimo è, per ipotesi, equivalente alla superficie convessa AMK, composta di due superficie parziali AN, MK. Dunque

la somma dei rettangoli AMNF, MEKN è maggiore della somma delle superficie convesse corrispondenti AN, MK. Dunque bisognerà che uno almeno dei rettangoli AMNF, MEKN sia maggiore della superficie convessa corrispondente. Questa conseguenza è contraria alla prima parte già dimostrata. Dunque 2.° la superficie convessa S non può esser eguale a quella del rettangolo corrispondente ABGF.

Segue da ciò che si ha S > ABGF, e che ancora la superficie convessa del cilindro è maggiore di quella di qualunque prisma nel medesimo iscritto.

Con un ragionamento assolutamente simile si proverebbe che la superficie convessa del cilindro è minore di quella di qualunque prisma al medesimo circoscritto.

NOTA XII.

Sopra l'eguaglianza, e la similitudine dei Poliedri.

Si trovano nel principio dell'XI.° Libro d'*Euclide* le definizioni 9. e 10. così concepite.

9. Due solidi sono *simili* allorchè son terminati da un medesimo numero di piani respettivamente *simili*.

10. Due solidi son *eguali* e *simili* allorchè son terminati da un medesimo numero di piani respettivamente *eguali*, e *simili*.

L'oggetto di queste definizioni essendo uno dei punti i più difficili degli *Elementi* di Geometria, noi gli esamineremo con qualche particolarità, e discuteremo nel medesimo tempo le osservazioni fatte a questo proposito da Roberto Simson nella sua Edizione degli *Elementi* a pag. 388 e segg.

In primo luogo osserveremo col precitato Roberto Simson che la definizione 10. non è propriamente una definizione, ma un Teorema, che bisognerebbe dimostrare; poichè non è evidente che due solidi sieno eguali per la sola condizione ch' essi abbiano tutte le facce respettivamente eguali; e, se questa proposizione è vera, convien dimostrarla o con la soprapposizione, o in qualunque altra maniera. Si vede in seguito che l'inconveniente della definizione 10. è comune alla definizione 9. Poichè, se la definizione 10. non è dimostrata, si potrà credere che esistan due solidi ineguali, e dissimili, le cui facce son eguali; ma allora, secondo la definizione 9, un terzo solido, che avesse le facce simili a quelle de' due primi, sarebbe simile a ciascuno di loro, e così sarebbe simile a due corpi di differente forma; conclusione, che implica contradizione, o almeno che non si accorda con l'idea, che si annette naturalmente alla parola *simile*.

Più Proposizioni dell' XI.° e XII.° Libro d' Euclide son fondate sulle definizioni 9. e 10., e tra l'altre la Proposizione XXVIII. del Libro XI; dalla quale dipende la misura dei Prismi, e delle Piramidi. Sembra dunque che si possa rimproverare agli *Elementi d' Euclide* di contenere un gran numero di Proposizioni, che non sono rigorosamente dimostrate. Ma vi è una circostanza bastevole ad indebolire questo rimprovero, e che non devesi omettere.

Le Figure, mediante le quali Euclide dimostra l'eguaglianza o la similitudine dei solidi fondandosi sulle definizioni 9. e 10, son tali che i loro angoli solidi non son formati da più di tre angoli piani. Ora, se due angoli solidi son composti ciascuno di tre angoli piani respettivamente eguali, è dimostrato assai chiaramente in più luoghi da Euclide che questi angoli solidi son eguali.

D'altronde, se due Poliedri hanno le facce respettivamente eguali, e simili, gli angoli solidi omologhi saranno composti d'un medesimo numero d'angoli piani respettivamente eguali. Dunque, fintantochè gli angoli piani non sono in maggior numero di tre in ciascun angolo solido, è chiaro che gli angoli solidi omologhi son eguali. Ma, se le facce omologhe son eguali, e gli angoli solidi omologhi eguali, non vi è più dubbio che i solidi non sieno eguali; poichè essi potranno essere soprapposti, o almeno saranno simmetrici l'uno rispetto l'altro. Si vede dunque che l'enunciato delle definizioni 9. e 10. è vero, ed ammissibile almeno nel caso degli angoli solidi tripli, ch'è il solo del quale Euclide abbia fatt' uso. Così il rimprovero d'inesattezza, che si potrebbe fare a questo Autore, o ai suoi Commentatori, cessa d'essere cotanto grave, e non cade più che sopra le restrizioni, e spiegazioni, ch'ei non ha date.

Resta dunque da esaminarsi se l'enunciato della definizione 10., ch'è vero nel caso degli angoli solidi tripli, sia vero altresì in generale. Roberto Simson assicura che ciò non è, e che si possono costruire due solidi diseguali, i quali saran terminati da un medesimo numero di facce respettivamente eguali. „ Immaginate (scrive „ l'Autore) che a un Poliedro qualunque si aggiunga una Piramide, dandole per base una „ delle facce del Poliedro; immaginate ancora „ che, in vece di aggiungervi la Piramide, essa si „ tolga, formando nel Poliedro una cavità eguale „ alla Piramide: avrete così due nuovi solidi „ forniti di facce respettivamente eguali, e frattanto questi due solidi saranno ineguali. „

Tale è l'esempio allegato da Roberto Simson per provare la sua asserzione; ma noi osserveremo che uno dei solidi, di cui si tratta, contiene degli

angoli solidi rientranti: ora è più che probabile ch' Euclide abbia inteso escludere i corpi irregolari, che hanno delle cavità, o degli angoli solidi rientranti, e che si è limitato ai Poliédri convessi. Ammettendo questa restrizione, senza la quale, per il contrario, altre Proposizioni non sarebbero vere, l'esempio di Roberto Simson non conclude niente contra la Definizione, o Teorema d'Euclide. Noi crediamo all'opposto, dopo un esame maturo, che questo Teorema è verissimo; ma non ci sembra però niente facile darne la prova.

In qualunque modo la cosa sia resulta da queste osservazioni che le definizioni 9. e 10. d'Euclide non posson essere conservate tali com' esse sono. Roberto Simson sopprime la definizione dei solidi eguali, che infatti non debb' esser posta se non che fra i Teoremi, e definisce per *solidi simili* quelli, che son circondati da un medesimo numero di piani *simili*, e che hanno gli angoli solidi respettivamente eguali. Questa definizione è vera, ma essa ha l'inconveniente di contener delle condizioni superflue. Se si sopprime la condizione degli angoli solidi eguali, si ricaderebbe nell' enunciato d' Euclide, ch' è difettoso, perchè suppone la dimostrazion del Teorema risguardante i Poliédri eguali. A scanso d'ogni imbarazzo abbiamo creduto a proposito di dividere in due parti la definizion de' solidi *simili*: primieramente abbian definite le piramidi triangolari *simili*; dipoi abbiam definiti per *solidi simili* quelli, che han basi *simili*, ed i cui vertici omologhi fuori di queste basi son determinati da piramidi triangolari respettivamente *simili*.

Questa definizione esige quanto alle basi, supponendole triangolari, due condizioni, e per cia-

scuno dei vertici fuor delle basi tre condizioni di maniera che, se S è il numero degli angoli solidi di ciascuno dei Poliédri, la *similitudine* di questi Poliédri esigerà $2+3(S-3)$ angoli eguali da una parte, e dall' altra, ovvero $3S-7$ condizioni; nè alcuna di queste condizioni è superflua, o compresa nell' altra. Poichè consideriamo qui due Poliédri come aventi semplicemente il medesimo numero di vertici, o d'angoli solidi; allora bisognano rigorosamente, e senza ometterne alcuna, le $3S-7$ condizioni perchè i due solidi sieno *simili*; ma, se prima di tutto si supponga che sono l' uno e l' altro della medesima specie, e vale a dire ch' essi hanno un egual numero di facce, e che queste facce paragonate insieme hanno respettivamente un egual numero di lati, questa supposizione conterrebbe alcune delle dette condizioni nel caso che vi fossero delle facce di più di tre lati, e queste condizioni diminuiranno il numero $3S-7$ di modo che, in vece di $3S-7$ condizioni, non ne bisogneranno che $A-1$: sopra di che vedete la Nota VIII. Si fa manifesto da ciò cosa sia, che dà luogo alla difficoltà di porre in essere una buona definizione de' solidi *simili*. Così si possono considerare come essendo della medesima specie, o solamente come avendo un egual numero d' angoli solidi. In quest' ultimo caso ogni difficoltà è allontanata, e bisogna che le $3S-7$ condizioni contenute nella definizione sien soddisfatte tutte perchè i solidi sieno *simili*, e se ne concluderà a più forte ragione ch' essi sono della medesima specie. Del resto la nostra definizione essendo completa n' abbiamo dedotta come Teorema la Definizione già data da Roberto Simson.

Si vede dunque che si può ben tralasciare, e

risparmiarsi di porre negli *Elementi* il Teorema concernente l'eguaglianza de' Poliédri; ma siccome questo Teorema è interessantissimo per se stesso, sarebbe desiderabile che se ne trovasse una dimostrazion generale.

FINE DELLE NOTE.

TRIGONOMETRIA

pag.	*vers.*	ERRORI	CORREZIONI
4	20	preso complemento	preso positivamente
5	9	(in margine)	Fig. 1.
13	27	(in margine)	Fig. 1.
15	5	sen A :	sen A : :
15	22	cosensi	coseni
20	10	di $< b$	di b
20	25	$sen\, b \cos a$	$sen\, b\, sen\, a$
25	14	numeri primi 7,11,15,ec.	numeri primi 7,11,13,ec.
25	21	0,156434465040251	0,156434465040231
26	19	$-\frac{1}{2} R \cos (a - b)$	$-\frac{1}{2} R \cos (a + b)$
28	1	$\frac{sen\, p - sen\, q}{\cos p - \cos q}$	$\frac{sen\, p - sen\, q}{\cos q - \cos p}$
29	6 e 7	di $sen\,(a + b)$	di $sen(a+b)$ e di $\cos(a+b)$
30	26	$\sqrt{-1}\ sen\ a$	$\sqrt{-1}\ sen\ A$
30	6	$= 2 \cos a \cos +$	$= 2 \cos a \cos x$
[illegible]	37	$- \cos (x - a)$	$- sen\,(x - a)$
39	38	$- sen\,(x - a)$	$- \cos (x - a)$
46	13	$= \frac{B}{2abc} \sqrt{(2a^2 b^2 +}$	$= \frac{R}{2abc} \sqrt{(2a^2 b^2 +}$
48	8	$\sqrt{a^2 - b^2)}$	$\sqrt{(a^2 - b^2)}$
51	11	$a < b$	$a > b$
53	12	le linee AF, DE	le linee AF, BE
53	17	AF = CE − CA	AE = CE − CA
55	2	sen $\frac{1}{2}$ A	sen^2 $\frac{1}{2}$ A
55	4	logaritmo di $\frac{1}{2}$ A	logaritmo di sen $\frac{1}{2}$ A
55	22	(in margine)	Fig. 7.
57	9	(in margine)	Fig. 8.
58	22	BAD, ed ACD	BAD e CAD
59	14	(in margine)	Fig. 9.
59	23	angolo dato AMG	angolo dato AMC
60	14	$\frac{1}{2} A = 76° 31\ 5''$	$\frac{1}{2} A = 76° 31', 5$
60	19	$AD = \frac{sen\, BDA}{BA.R}$	$AD = \frac{R.BA}{sen\, BDA}$
63	15	(in margine)	Fig. 10.
64	18	$\frac{tang\, b}{sen\, b}$;	$\frac{tang\, b}{sen\, b}$.
72	23	ma sia come	ma siccome
76	8	$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\, b}{sen\ B}$	$\frac{sen\ A}{sen\, a} = \frac{sen\ B}{sen\, b}$

84	13	cot a sen C	cot A sen C
90	20	il punto B	il punto B′
98	3	$=3,8038812297$	$3,80388012297$
105	19	$a=100-\alpha$	$a=100+\alpha$
106	8	$\frac{1}{2}\alpha-6)$	$\frac{1}{2}(\alpha-6)$
107	19	$\cos\frac{a}{r}-\cos r\cos\frac{c}{k}$	$\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$
111	21	$100-\frac{1}{3}C'=38\ 40\ 1,99$	$100-\frac{1}{2}C'=38\ 40\ 1,97$
111	30	9,7132961	9,7182961
115	8	opposto	proposto
123		$\sqrt{\frac{4\,\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2}}{\left[c^2+16(\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2})^2\right]}}$	$\frac{4\,\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\left[f^2+16(\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2})^2\right]}}$
132	29	$\text{tang}\, b^2+\text{tang}\, c^2=$	$\text{tang}\, b^2+\text{tang}\, c^2-$
133	15	al lato A	al lato a
142	15	$\text{sen}\,\frac{a-b+c}{2}$	$\text{sen}\,\frac{b-a+c}{2}$
146	28 e 29	$-\cos(B+C)$	$-\cos(B-C)$
148	4	$+\frac{6^2\gamma^2}{4\,6\gamma r^2}$	$-\frac{6^2\gamma^2}{4\,6\gamma r^2}$

N O T E

7	17	angoli	angoloidi
9	1	l' angolo CAZ	l' angolo CAL
9	3	*l' angolo* IAC	*l' angolo* IAL
15	[illegible]	[illegible]	$p'^3\Pi$.
30	[illegible]	(in margine) Fig. 4.	Fig. 4. a
32	[illegible]	(in margine) Fig. 5.	Fig. 5. a.
33	30	$\sqrt{(1\cos^2\alpha-}$	$\sqrt{(1-\cos^2\alpha-}$
42	18	$A=\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}\omega$	$A=\frac{3}{2}H+\frac{1}{2}\omega$
42	20	$A>\frac{1}{2}H$	$A>\frac{3}{2}H$
42	33	$3H+\omega>6+\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}\omega$	$3H+\omega>6+\frac{3}{2}H+\frac{1}{2}\omega$
44	12	$A=\frac{1}{2}H$	$A=\frac{3}{2}H$
49	19	$\cos C=-\frac{1}{3}$	$\cos C=-\frac{1}{3}$
49	23	(in margine)	Fig. 14.
55	6	$\text{sen}\,\frac{b+a-c}{2}$	$\text{sen}\,\frac{b+c-a}{2}$
56	9	$\cos b\cos c$	$\cos b+\cos c$

Legendre. Elementi di Geometria
5
6
7
8
4
13
14
15
16
21
24
25
29
30
31
33
34

Legendre.
88
87
94
95
98
99
100
105
106
111
112

60
64
76
80

165
A
M
N
P
C
T
S
G
E
L
P
M
O
F
B
D
169
168
C
D
A
170
175
C
B
A
174
D
C
D
C
A
O

A E B
182
C F D
C

A E
186
M
P C
D
B
N

M
C H
G
A E
N
190
P
D
B F
Q

S
a
b
c
K
Q
M
L
215
D
P
F
X
E
Y
O
H
C
G
I
B
N
R
D
M
A
M
G
E
F
C
B
O
E
D
226
F
A
B
H

230
231
232
235
236
240
241 b
242
246
247

253

254

255

263

264

272

S
D
m
Q
T
M
A
P
p
C
Fig. 1.
V
R
E
E
A
C
F
B
10
E
D
F
C
B
D
B'

T. II.
36
39
40
41
46
47
48
53
54

M'''
A
L
2
M
C
T
M
C
7
A
A
o
p
d
c
l
a
h
i
K
L
E
1
M
X
N
Y
Z